

Αγγελος Γκίνης

(Σπέτσες, 1859 - Αθήνα, 1928)

Πολιτικός μηχανικός, καθηγητής του Πολυτεχνείου και ακαδημαϊκός, που συνέβαλε ιδιαίτερα στη δημιουργία και την οργάνωση του Εθνικού Μετσόβιου Πολυτεχνείου. Σπούδασε στο πολυτεχνείο της Δρέσδης (1877 - 81).



Το 1912, ο Αγγελος Γκίνης, Διευθυντής της Σχολής Πολιτικών Μηχανικών (ΠΜ), δημοσίευσε την ιστορία του Πολυτεχνείου στην οποία περιέλαβε μια τεκμηριωμένη πρόταση για την ανάπτυξη της Σχολής και την αναβάθμιση της εκπαίδευσης των μηχανικών στη χώρα . Οι προσπάθειές του και η βοήθεια των συνεργατών του είχαν ως αποτέλεσμα τη δημοσίευση του Νόμου 388/1914, με το πρώτο άρθρο του οποίου το Μετσόβιο ονομάστηκε "Εθνικό Μετσόβιο Πολυτεχνείο", με παράλληλη ίδρυση νέων σχολών, την αναδιοργάνωση των μαθημάτων, την έκδοση κανονισμού λειτουργίας και την αυτονομία της Σχολής σε πολλούς τομείς. Οι αλλαγές αυτές επισημοποιήθηκαν με το Διάταγμα 388/1915 (έναρξη της πενταετούς φοίτησης) και ολοκληρώθηκαν με το Νόμο 980/1917, ο οποίος και έδωσε στο Ε.Μ.Π. τη σημερινή του μορφή.

Υπήρξε εκ των ιδρυτικών μελών της Ακαδημίας Αθηνών (1926)

Το Κτίριο Γκίνη, το οποίο ονομάστηκε προς τιμή του, κατασκευάστηκε μεταξύ των ετών 1930-1935, βάσει σχεδίων του αρχιτέκτονα Κώστα Κιτσίκη (1892-1969), απόφοιτου της γερμανικής σχολής του Berlin-Charlottenburg, εκπρόσωπου ενός ιδιόρρυθμου δυναμικού νεοακαδημαϊσμού, που προωθεί μια σύνδεση παλαιότερων και νεότερων μορφών, με παλινδρομήσεις ανάμεσα στο μοντέρνο και το κλασικό.

KARL ZILLICH

ΣΤΑΤΙΚΗ
ΤΩΝ ΟΙΚΟΔΟΜΙΚΩΝ ΚΑΙ ΤΕΧΝΙΚΩΝ ΕΡΓΩΝ
ΜΕΤΑΦΡΑΣΘΕΝΑ ΕΚ ΤΟΥ ΓΕΡΜΑΝΙΚΟΥ ΚΑΙ ΣΥΜΠΛΗΡΩΘΕΙΣΑ

ΥΠΟ

ΑΓΓΕΛΟΥ ΓΚΙΝΗ

*Χορηγολογιστή, καθηγητὴ τῆς Γεφυροδοποιίας
ἐν τῇ Μεταβατικῇ Πολυτεχνείῳ.*

ΕΙΣ ΜΕΡΗ ΤΡΙΑ

ΜΕΡΟΣ ΠΡΩΤΟΝ

ΓΡΑΦΙΚΗ ΣΤΑΤΙΚΗ

μετὰ 176 σχημάτων ἐν τῷ κειμένῳ.



ΕΝ ΑΘΗΝΑΙΣ

1902

ΕΚ ΤΟΥ ΤΥΠΟΓΡΑΦΕΙΟΥ ΤΩΝ ΒΙΒΛΙΟΜΟΡΦΕΙΩΝ
ΑΠΟΣΤΟΛΟΠΟΥΛΟΥ

KARL ZILlich

ΣΤΑΤΙΚΗ

ΤΩΝ ΟΙΚΟΔΟΜΙΚΩΝ ΚΑΙ ΤΕΧΝΙΚΩΝ ΕΡΓΩΝ

ΜΕΤΑΦΡΑΣΘΕΙΣΑ ΕΚ ΤΟΥ ΓΕΡΜΑΝΙΚΟΥ ΚΑΙ ΣΥΜΠΛΗΡΩΘΕΙΣΑ

ΥΠΟ

ΑΓΓΕΛΟΥ ΓΚΙΝΗ

Χημειχανικού, καθηγητού της Γεφυροσδόπουσας
ἐν τῷ Μετσόλειῳ Πολυτεχνείῳ.

ΜΕΡΟΣ ΠΡΩΤΟΝ

ΓΡΑΦΙΚΗ ΣΤΑΤΙΚΗ

Μετὰ 170 σχημάτων ἐν τῷ κειμένῳ

ΜΕΡΟΣ ΔΕΥΤΕΡΟΝ

ΑΝΤΙΣΤΑΣΙΣ ΤΗΣ ΥΛΗΣ

Μετὰ 100 σχημάτων ἐν τῷ κειμένῳ

ΜΕΡΟΣ ΤΡΙΤΟΝ

ΜΕΓΑΛΕΥΤΕΡΑ ΕΡΓΑ

Μετὰ 140 σχημάτων ἐν τῷ κειμένῳ

Πωλεῖται ὁρ. Β τῷ παρὸν τομίδιῳ (ἔκρος Α').

KARL ZILLICH

ΣΤΑΤΙΚΗ
ΤΩΝ ΟΙΚΟΔΟΜΙΚΩΝ ΚΑΙ ΤΕΧΝΙΚΩΝ ΕΡΓΩΝ
ΜΕΤΑΦΡΑΣΘΕΙΣΑ ΕΚ ΤΟΥ ΓΕΡΜΑΝΙΚΟΥ ΚΑΙ ΣΥΜΠΛΗΡΩΘΕΙΣΑ

ΥΠΟ

ΑΓΓΕΛΟΥ ΓΚΙΝΗ

*Νομομηχανικοῦ, καθηγητοῦ τῆς Γεφυροδοποιίας
ἐν τῷ Μετσοβείῳ Πολυτεχνείῳ.*

ΕΙΣ ΜΕΡΗ ΤΡΙΑ

ΜΕΡΟΣ ΠΡΩΤΟΝ

ΓΡΑΦΙΚΗ ΣΤΑΤΙΚΗ

μετὰ 176 ὀχημάτων ἐν τῷ κειμένῳ.



ΕΝ ΑΘΗΝΑΙΣ

1902

ΕΚ ΤΟΥ ΤΥΠΟΓΡΑΦΕΙΟΥ ΤΩΝ ΒΙΒΛΙΕΜΠΟΡΕΩΝ
ΑΠΟΣΤΟΛΟΠΟΥΛΟΥ

ΠΡΟΛΟΓΟΣ

Τὸ παρὸν σύγγραμμα εἶναι κατὰ τὸ πλεῖστον μετάφρασις ἐκ τοῦ Γερμανικοῦ (*Statik für Baugewerkschulen und Baugewerksmeister von Karl Zillich, Königlichcr Wasserbauinspektor*).

Ὁ Γερμανὸς Συγγραφεὺς ἔγνω ἐν τῷ πονήματι τοῦ τούτου νὰ κατατάξῃ ἐν ζηλωτῇ μεθοδικότητι καὶ νὰ πραγματευθῇ ἐν ἀπλότητι καὶ σαφηνείᾳ πάντα τὰ ζητήματα Ἀντοχῆς τὰ παρουσιαζόμενα ἐν τῇ οἰκοδομικῇ κυρίως.

Ἡ κατανόησις τοῦ ὅλου Συγγράμματος δὲν ἀπαιτεῖ ἢ στοιχειώδεις μαθηματικὰς γνώσεις. Ἐκτεταμέναι θεωρίαι ἀπεκλείσθησαν· τὸναντίον πολλαχοῦ ἐχρησίμευσεν ἡ παρατηρητικότης καὶ ἡ φυσικὴ ἀντίληψις εἰς τὸ νὰ ἐπεξηγηθῇ ὅ,τι πραγματευόμεθα ἐν τῷ πονήματι τούτῳ. Ἀφ' ἑτέρου πολλὰ παραδείγματα συμπληροῦσι τὰ μέσα ἐπεξηγήσεως.

Οἱ ὀχληροὶ ἀριθμητικοὶ λογαριασμοὶ περιορίζονται διὰ τῆς χρήσεως εὐαρίθμων πινάκων, διὰ τῶν ὁποίων εἶναι πεπλουτισμένα τὰ δύο τελευταῖα μέρη τοῦ Ἔργου.

Οἱ τύποι διατομῶν τῶν τόσον συνήθων, ἰδίᾳ ἐν τῇ οἰκοδομικῇ σιδηρῶν Δοκῶν σχήματος διπλοῦ ταῦ, προσδιορίζονται εἰς πολλὰς περιπτώσεις ἀπ' εὐθείας ἐκ τῶν πινάκων τούτων (μέρος δεύτερον), τῇ βοήθειᾳ

τῶν ὁποίων καὶ ὁ μᾶλλον ἄπειρος δύναται νὰ διεξάγῃ ἀπλοῦς στατικούς ὑπολογισμούς.

Ἐπὶ τοιούτων βάσεων συντεταγμένον τὸ προκείμενον Σύγγραμμα ἀποβαίνει ἱκανὸν μὲν ἐν τῇ πράξει βοήθημα εἰς πάντα Μηχανικὸν καὶ Ἀρχιτέκτονα, συνιστᾶται δὲ κυρίως πρὸς ἰδίαν μελέτην καὶ ὁδηγίαν εἰς τοὺς ἐργοδηγοὺς μαθητὰς καὶ ἀποφοίτους τεχνικῶν Σχολῶν.

Τὰ δύο ὑπολειπόμενα μέρη, ἐκδοθησόμενα προσεχῶς, θὰ περιέχωσι τὸ μὲν δεύτερον τὰ τῆς Ἀντοχῆς τῆς ὕλης, τὸ δὲ τρίτον τὰ τῆς Ἀντοχῆς μεγαλειτέρων οἰκοδομικῶν καὶ τεχνικῶν Ἔργων.

Ἀθῆναι, κατὰ Ἰούλιον 1902.

Α. ΓΚΙΝΗΣ



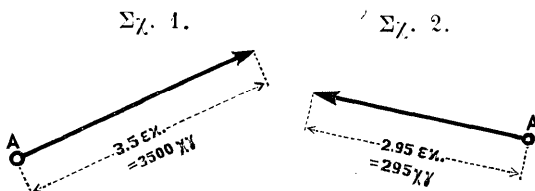
ΚΕΦΑΛΑΙΟΝ Α'.

ΣΥΝΘΕΣΙΣ ΔΥΟ ΔΥΝΑΜΕΩΝ ΚΑΙ ΑΠΟΣΥΝΘΕΣΙΣ ΜΙΑΣ ΔΥΝΑΜΕΩΣ ΕΙΣ ΔΥΟ

§ 1. Γραφική παράστασις τῶν Δυνάμεων.

Μέτρον διὰ τὰς Δυνάμεις εἶναι τὸ χιλιόγραμμα (γράφομεν ἐν συντομίᾳ χγ). Λέγομεν μία Δύναμις 7 χγ, 9 χγ, 30 χγ, 140 χγ, 1500 χγ, κ.λ.π. καὶ ὑπονοοῦμεν ὅτι ἡ Δύναμις αὕτη ἐνεργεῖ ὡς βάρος 7 χγ, 9 χγ κ.λ., τὸ ὅποιον κρέμαται ἐξ ἐνὸς σχοινοῦ.

Ὅταν αἱ Δυνάμεις εἶναι πολὺ μεγάλαι, τότε λαμβάνομεν ἀκόμη ὡς Μονάδα τὸν Τόνον (γράφομεν συντόμως t).



Κλίμαξ: 1 ἐκ. = 1000 χγ. Κλίμαξ: 1 ἐκ. = 100 χγ.

Ἡ σύνθεσις καὶ ἡ ἀποσύνθεσις τῶν Δυνάμεων γίνεται κυρίως διὰ τῆς γραφικῆς μεθόδου. Κατὰ τὴν μέθοδον ταύτην αἱ Δυνάμεις παρίστανται δι' εὐθειῶν γραμμῶν (Σχ. 1). Ἡ γραμμὴ δίδει τὴν θέσιν, τὸ δὲ μῆκος αὐτῆς τὸ μέγεθος τῆς Δυνάμεως. Ὅταν λ.χ. τὰ 1000 χιλιόγραμμα παριστῶνται ἐν τῷ Σχεδίῳ διὰ μῆκους 1 ἑκατοστοῦ τοῦ μέτρου, μία Γραμμὴ μῆκους $3\frac{1}{2}$ ἑκατοστών παρίστα Δύναμιν 3500 χγ. Ἐάν ἔχωμεν 1 ἐκ. = 100 χγ (Σχ. 2)

τότε Δύναμις 295 χγ. παρίσταται ἐν τῷ Σχεδίῳ διὰ μιᾶς Γραμμῆς μήκους 2,95 ἐκ.

Ἡ φορὰ τῆς ἐνεργείας τῆς Δυνάμεως, ἴτοι τὸ ἐὰν ἡ Δύναμις ἐνεργῇ πρὸς τὸ ἐν ἢ τὸ ἄλλο μέρος τῆς γραμμῆς, ἐκδηλοῦται διὰ βέλους· τὸ δὲ σημεῖον, ἐφ' οὗ ἐνεργεῖ, τὸ σημεῖον προσβολῆς, δηλοῦται δι' ἐνὸς μικροῦ κύκλου (Α). Οὕτως δίδονται τὰ τρία στοιχεῖα, σημεῖον προσβολῆς, μέγεθος καὶ διεύθυνσις, διὰ τῶν ὁποίων προσδιορίζεται Δύναμις τις.

Θέματα. α') Σχεδιάσωμεν, ὑπὸ κλίμακα 1 ἐκ. = 1 χγ, μίαν Δύναμιν 1 χγ, 1,4 χγ, 1,7 χγ, 5 χγ, 10 χγ, 15 χγ.

β') Σχεδιάσωμεν τὰς αὐτὰς Δυνάμεις ὑπὸ κλίμακα 1 ἐκ. = 2 χγ, καὶ 1 ἐκ. = 5 χγ.

γ') Σχεδιάσωμεν ὑπὸ κλίμακα 1 ἐκ. = 1000 χγ. Δυνάμεις 1500, 2300, 3750, 4400, 5000 χγ.

δ') Σχεδιάσωμεν τὰς αὐτὰς Δυνάμεις ὑπὸ κλίμακα 1 ἐκ. = 2000 χγ. καὶ 1 ἐκ. = 500 χγ.

§ 2. Δυνάμεις ἐπὶ τῆς αὐτῆς Γραμμῆς.

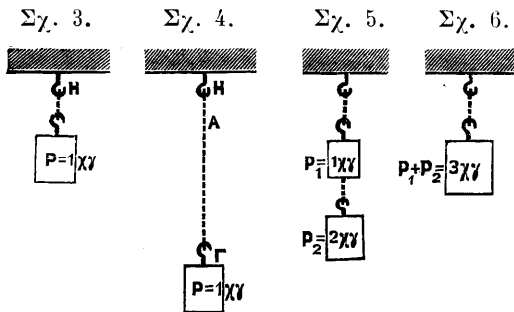
Συνήθως παρευρίσκονται ἐν τῷ αὐτῷ πλείονες Δυνάμεις καὶ πρόκειται περὶ τῆς συνεργασίας των. Διὰ τὸν προσδιορισμὸν τῆς τελευταίας γίνεται χρῆσις τῶν ἀκολουθῶν κανόνων.

1. Ἡ ἐνέργεια Δυνάμεως μετατοπιζομένης κατ' εὐθεῖαν γραμμὴν μένει ἡ αὐτή.

Τὸ βάρος 1 χγ, ἐξασκεῖ ἐπὶ τῆς Ἀρπάγης Η (Σχ. 3) τὴν αὐτὴν ἐλκύνουσαν Δύναμιν, ἣν ἐξασκεῖ καὶ ὅταν ἐνεργῇ κατὰ τὸ Σχῆμα 4. Κατὰ τὸ Σχ. τοῦτο παρεμβάλλεται ἐν νῆμα ΑΓ καὶ ἡ Δύναμις μετατοπίζεται κατ' εὐθεῖαν γραμμὴν κατὰ τὴν ἀπόστασιν ΑΓ, χωρὶς, φυσικῶς, νὰ μεταβληθῇ τὸ παράπαν ἡ ἐνέργεια αὐτῆς.

Δυνάμεθα λοιπόν κατ' ἀρέσκειαν νὰ μετατοπίζωμεν τὴν Δύναμιν ἐπὶ τῆς γραμμῆς, ἐφ' ἧς ἐνεργεῖ.

2. Ὄταν δύο Δυνάμεις εὐρίσκωνται ἐπὶ τῆς αὐτῆς εὐθείας γραμμῆς καὶ ἔχωσι τὴν αὐτὴν φορὰν, τότε ἡ κοινὴ αὐτῶν ἐνέργεια εἶναι ἴση μὲ τὸ ἄθροισμα $(P_1 + P_2)$. Ὄταν τοὐναντίον ἔχωσιν ἀντίθετον φορὰν, τότε ἡ κοινὴ αὐτῶν ἐνέργεια εἶναι ἴση μὲ τὴν διαφορὰν $(P_1 - P_2)$.

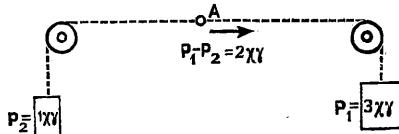


Ὁ Κανὼν οὗτος εἶναι γενικῶς γνωστός. Κρέμαται ἐν βάρους 1 χγ. ἐξ Ἀρπάγης τινὸς (Σχ. 5), ὑποκρέμαται δὲ καὶ δεύτερον βάρους 2 χγ. ὑπὸ τὸ πρῶτον, τότε ἐξασκοῦσιν ἀμφότερα τὴν αὐτὴν ἐνέργειαν, ὥς ἐὰν ἐκρέματο ἀντ' αὐτῶν ἐν βάρους $1 + 2 = 3$ χγ. (Σχ. 6).

Ὄταν ἐνεργῶσιν ἀπὸ ἐνὸς σημείου A (Σχ. 7) 3 χγ. πρὸς τὰ δεξιὰ καὶ 1 χγ.

Σχ. 7.

πρὸς τ' ἀριστερά, ἔχομεν τὸ ἀποτέλεσμα μιᾶς ἐνεργείας $3 - 1 = 2$ χγ. πρὸς τὰ δεξιὰ.

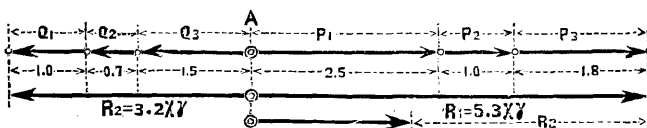


Ὄταν ἀπὸ ἐνὸς σημείου A (Σχ. 8) ἐνεργῶσιν αἱ Δυνάμεις P_1 , P_2 καὶ P_3 πρὸς τὰ δεξιὰ, ἡ κοινὴ αὐτῶν ἐνέργεια εἶναι ἴση μὲ μιάν Δύναμιν $R_1 = P_1 + P_2 + P_3 = 5,3$ χγ. Ὄταν ἀπὸ τοῦ αὐτοῦ

σημείου ἐνεργῶσι πρὸς τ' ἀριστερά αἱ Δυνάμεις Q_1, Q_2 καὶ Q_3 , δύνανται αὗται ν' ἀντικατασταθῶσιν ὑπὸ μιᾶς Δυνάμεως $R_2 = Q_1 + Q_2 + Q_3 = 3,2$ χγ.

Ἐν συνόλῳ λοιπὸν ἐνεργοῦσι 5,3 χγ. δεξιὰ καὶ 3,2 χγ. ἀριστερά. Τὸ ἀποτέλεσμα εἶναι ἡ πρὸς τὰ δεξιὰ ἐνέργεια μιᾶς Δυνάμεως $R = R_1 - R_2 = 2,1$ χγ. Ἡ Δύναμις αὕτη παριστᾷ τὴν ἐνέργειαν καὶ τῶν ἑξ Δυνάμεων ὁμοῦ. Καλεῖται «*Μέση Δύναμις*» ἢ «*Συνισταμένη*».

Σχ. 8.



Ἐὰν χαρακτηρίσωμεν ὡς θετικὰς (+) τὰς πρὸς τὰ δεξιὰ ἐνεργοῦσας Δυνάμεις P καὶ ὡς ἀρνητικὰς (—) τὰς πρὸς τ' ἀριστερά Q , τότε ἡ Συνισταμένη πασῶν εἶναι ἴση μετὰ τὸ ἀλγεβρικὸν ἄθροισμα τῶν Δυνάμεων.

$$R = 2,5 + 1,0 + 1,8 - 1,5 - 0,7 - 1,0 = 2,1 \text{ χγ.}$$

Τὸ αὐτὸ προκύπτει, ἐὰν σχεδιάσωμεν τὴν μίαν κατόπιν τῆς ἄλλης ὑπὸ μίαν ὠρισμένην κλίμακα τὰς δεδομένας Δυνάμεις καὶ ἀφαιρέσωμεν γραφικῶς τὰς πρὸς τ' ἀριστερά διευθυνομένας ἐκ τῶν πρὸς τὰ δεξιὰ διευθυνομένων Δυνάμεων (Σχ. 8).

Θέματα. Ἀφ' ἐνὸς σημείου ἐνεργοῦσι τέσσαρες Δυνάμεις 10, 15, 20 καὶ 18 χγ. πρὸς τὰ δεξιὰ καὶ τρεῖς 18, 14 καὶ 22 χγ. πρὸς τ' ἀριστερά. Νὰ προσδιορισθῇ ἡ Συνισταμένη πασῶν.

Τὸ αὐτὸ νὰ γείνη λαμβανομένων τῶν αὐτῶν Δυνάμεων τετράκις μεγαλειτέρων.

Τὸ αὐτὸ λαμβανομένων ἑκατοντάκις μεγαλειτέρων.

Όταν τὸ ἄθροισμα τῶν πρὸς τ' ἀριστερά διευθυνομένων Δυνάμεων εἶναι μεγαλείτερον τοῦ τῶν πρὸς τὰ δεξιὰ, τότε φυσικὰ ἡ Συνισταμένη τῶν Δυνάμεων τούτων διεύθυνεται πρὸς τ' ἀριστερά. Κατὰ τοὺς ὑπολογισμοὺς λοιπὸν θὰ προκύψῃ Συνισταμένη ἀρνητικὴ.

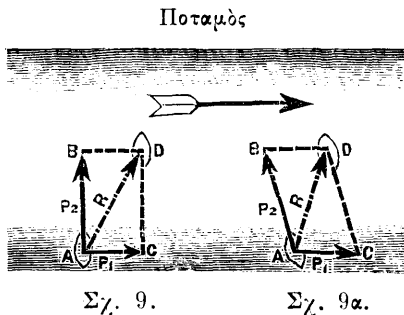
Θέμα. Νὰ προσδιορισθῇ ἡ Συνισταμένη τῶν ἀκολουθῶν Δυνάμεων : 1500, 210 καὶ 340 χγ. διευθυνομένων πρὸς τὰ δεξιὰ καὶ 750, 900, 1700 καὶ 1100 πρὸς τ' ἀριστερά.

§ 3. Τὸ παραλληλόγραμμον τῶν Δυνάμεων.

3. Δύο Δυνάμεις, αἱ ὁποῖαι ἐνεργοῦσιν ἐξ ἑνὸς σημείου κατὰ διαφόρους διευθύνσεις, ἀντικαθίστανται διὰ μιᾶς αὐτῇ δὲ εἶναι ἡ διαγώνιος τοῦ παραλληλογράμμου τοῦ σχηματιζομένου ἐκ τῶν δύο δεδομένων Δυνάμεων.

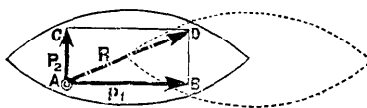
Τοῦτο ἀποδεικνύεται διὰ πειραμάτων (ᾧρα καὶ § 6 καὶ § 7). Ἀλλὰ καὶ τὸ βλέπομεν ὅταν, ἐπὶ παραδείγματι, μία λέμβος εὐρίσκομένη ἐντὸς ποταμοῦ διευθύνῃται ἐγκαρσίως (Σχ. 9). Ἐνφ διὰ τῆς δυνάμεως τῶν κωπῶν διανύει τὸ διάστημα AB , ὥθεϊται ταυτόχρονως ὑπὸ τοῦ ρεύματος κατὰ τὴν διεύθυνσιν $AC=BD$ καὶ φθάνει εἰς τὸ σημεῖον D καὶ οὐχὶ εἰς τὸ σημεῖον B , ὅπου θὰ ἔφθανεν, ἐὰν ὑπῆκουεν εἰς μόνην τὴν Δύναμιν τῆς κωπηλασίας, ἢ εἰς τὸ σημεῖον C ἐὰν ὑπῆκουεν εἰς μόνην τὴν δύναμιν τοῦ ρεύματος.

Ἡ διανυθεῖσα ἀπόστασις (F) εἶναι ἡ διαγώνιος AD τοῦ παραλληλογράμμου, τοῦ ὁποῦ πλευραὶ εἰσιν αἱ Δυνάμεις AB καὶ AC .



Τὸ αὐτὸ συμβαίνει καὶ ὅταν ἀντικείμενόν τι, εὕρισκό-
μενον ἐπὶ ἐνὸς πλοίου κινουμένου (Σχ. 10), αὐτὸ τὸ

Σχ. 10.

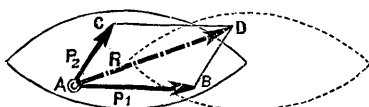


ἴδιον κινῆται ἐγκαρσίως
ἐκ τοῦ σημείου Α πρὸς τὸ
σημεῖον C τοῦ πλοίου.
Καθ' ὃν χρόνον τὸ ἀντι-
κείμενον φθάσει εἰς τὸ

νέον σημεῖον C, τὸ πλοῖον ἔχει διανύσει τὸ διάστημα
AB, τότε τὸ ἀντικείμενον θὰ εὕρισκῃται, ἐν σχέσει
πρὸς τὸ περιβάλλον τὸ πλοῖον κενόν, εἰς τὸ σημεῖον
D, καὶ τὸ διάστημα, ὅπερ διήνυσεν, εἶναι ἡ διαγώνιος
AD τοῦ σχηματιζομένου ἐκ τῶν δύο κινήσεων παραλ-
ληλογράμμου.

Τὸ αὐτὸ ἰσχύει καὶ ὅταν αἱ Δυνάμεις δὲν εἶναι κάθε-

Σχ. 11.



τοι ἀλλὰ σχηματίζωσι με-
ταξὺ τῶν γωνιῶν οἰαν-
δήποτε (Σχ. 9 καὶ Σχ. 11).
Δύναμεις τις R ἴση μὲ τὴν
διαγώνιον AD δύναται νὰ

ἀντικαταστήσῃ τὴν ἐνέργειαν τῶν δύο Δυνάμεων P_1 καὶ
 P_2 . Τὰς Δυνάμεις P_1 καὶ P_2 καλοῦμεν «*Δυνάμεις πλευρι-
κὰς ἢ Συνιστάσας*», τὴν δὲ R «*Μέσην Δύναμιν*» ἢ «*Συνι-
σταμένην*».

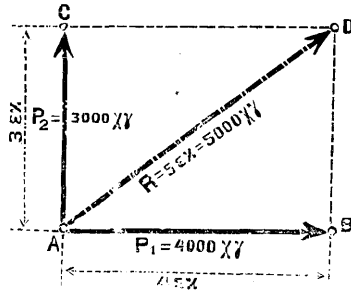
Ὅταν λοιπὸν πρόκειται νὰ συνθέσωμεν δύο Δυνάμεις,
αἵτινες ἐνεργοῦσιν ἀφ' ἐνὸς σημείου (Σχ. 12) εἰς μίαν Δύ-
ναμιν, φέρομεν ἐκ τοῦ ἄκρου σημείου (B) τῆς P_1
παράλληλον τῇ P_2 , τὴν BD, ἐκ τοῦ ἄκρου (C) τῆς
 P_2 παράλληλον τῇ P_1 , τὴν CD καὶ εὕρισκομεν τὴν
Συνισταμένην $R = AD$, ἐπὶ τοῦ προκειμένου = 5 ἐκ
= 5000 χγ.

Διὰ νὰ εἶναι δυνατὴ ἡ, ὅσον ἔνεστι, ἀκριβεστέρα ἐκ τοῦ

σχεδίου καταμέτρησις τοῦ μήκους AD, δὲν προεκτείνον-
ται μέχρι τοῦ σημείου συναντήσεως αἱ διὰ τῆς συναντή-
σεως των προσδιορίζουσαι τὴν ζητούμενην Συνισταμένην
γραμμαὶ BD καὶ CD, ἀλλὰ

Σχ. 12.

μέχρις ἑνὸς μικροῦ κύκλου
περιβάλλοντος τὸ σημεῖον
συναντήσεως, ὅπερ εὕρισκε-
ται ἐν τῷ κέντρῳ τοῦ κύ-
κλου τούτου. Εἰς τὴν Γρα-
φοστατικὴν συνηθίζουσι νὰ
περιβάλλωσι τὰ ἄκρα γραμ-
μῶν, τῶν ὁποίων τὸ ἀκριβὲς
μῆκος ἔχει σημασίαν τινά,



Κλίμαξ: 1 ἐκ. = 1000 χγ.

μὲ μικροὺς κύκλους. Μεταξὺ τῶν κύκλων τούτων εἶναι
δυνατὸν νὰ προεκτείνωμεν τὰς γραμμάς, μὲ οἷονδήποτε
πάχος θέλομεν, ἄνευ ζημίας τινὸς τῆς ἀκριβείας.

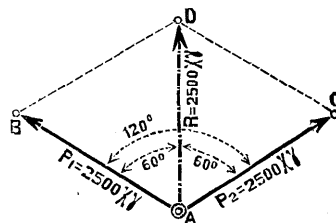
Εἰς τὸ Σχ. 12 δυνάμεθα ἀκόμη καὶ δι' ὑπολογισμοῦ εὐ-
κόλως (ἐπειδὴ τὸ τρίγωνον ABD εἶναι ὀρθογώνιον) νὰ
προσδιορίσωμεν τὸ μέγεθος τῆς Συνισμένης R. Τφόντι
ἔχομεν:

$$\overline{AD}^2 = \overline{AB}^2 + \overline{BD}^2 = 16 \text{ τετρ. ἐκ.} + 9 \text{ τετρ. ἐκ.} = 25 \text{ τετρ. ἐκ.} \text{ Λοιπόν,}$$

$$\overline{AD} = \sqrt{25 \text{ τετρ. ἐκ.}} = 5 \text{ ἐκ.} = 5000 \text{ χγ.} \text{ Εἰς τὸ Σχ. 13}$$

Σχ. 13.

εἰσὶ δεδομέναι δύο Δυνάμεις
 P_1 καὶ P_2 ἀνὰ 2500 χγ. ἐ-
κάστη. Ἐκ τοῦ B φέρομεν
παράλληλον τῇ P_2 καὶ τοῦ
C παράλληλον τῇ P_1 . Ἡ
συνισταμένη προκύπτει AD
= 2, 5 ἐκ = 2500 χγ.

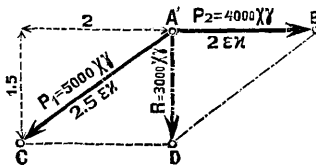


Κλίμαξ: 1 ἐκ. = 1000 χγ.

Καὶ εἰς τὴν περίπτωσιν ταύ-
την δυνάμεθα εὐκόλως καὶ ἄνευ σχεδιάσεως νὰ προσ-

διορίσωμεν τὸ μέγεθος τῆς Συνισταμένης AD . Εἰς τὸ παραλληλόγραμμον $ABDC$ εἰσὶν πᾶσαι αἱ πλευραὶ ἴσαι. Ἔχομεν λοιπὸν ἓνα Ῥόμβον. Ἡ διαγώνιος, ἐν τοιαύτῃ περιπτώσει, ἰσοτομεῖ τὴν γωνίαν A τῶν 120° · εἰς δὲ τὰ ἰσοσκελῆ τρίγωνα ABD καὶ ACD ἐκάστη τῶν παρὰ τὸ

Σχ. 14.



Κλίμαξ: 1 εκ. = 2000 χγ.

αὐτὸ σημεῖον A γωνιῶν εἶναι ἴση πρὸς 60° . Ἀλλὰ καὶ αἱ δύο ἄλλαι γωνίαι ἐκάστου τριγώνου, αἱ D, B καὶ D, C εἰσὶν ἴσαι μὲ 60° , ἄρα τὰ τρίγωνα ABD καὶ ACD εἶναι καὶ ἰσόπλευρα, κατὰ συνέπειαν ἔχομεν:

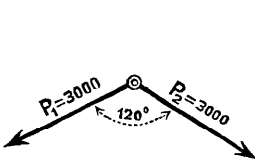
$$AD = AB = AC = 2,5 \text{ εκ.} = 2500 \text{ χγ.}$$

Εἰς τὸ Σχ. 14 εἰσὶ δεδομέναι δύο Δυνάμεις $P_1 = 5000$

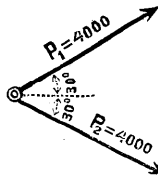
Σχ. 15.

Σχ. 16.

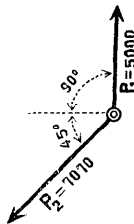
Σχ. 17.



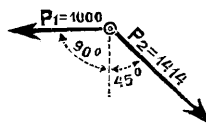
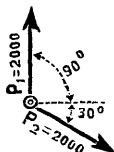
Σχ. 18.



Σχ. 19.



Σχ. 20.

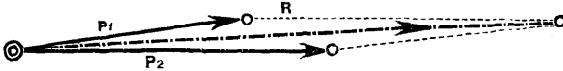


$\chi\gamma.$ καὶ $P_2 = 4000 \chi\gamma.$ Ἡ Συνισταμένη AD εὐρίσκεται διὰ τῆς χαράξεως τῶν παραλλήλων, ὅπως εἰς τὰ προηγούμενα Σχήματα.

Οὕτως ἔχομεν: $R = AD = 1,5 \text{ εκ.} = 3000 \text{ χγ.}$

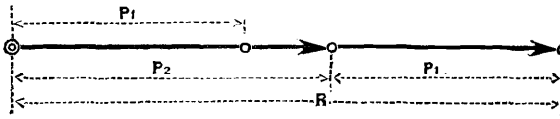
Θέματα. Νὰ εὕρωμεν τὰς Συνισταμένας τῶν εἰς τὰ Σχ. 15 μέχρι 20 δεδομένων Δυνάμεων.

Σχ. 21.



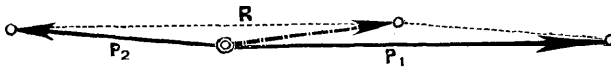
Ὅταν αἱ δεδομένοι Δυνάμεις ἔχωσι κατὰ προσέγγισιν τὴν αὐτὴν διεύθυνσιν (Σχ. 21), τότε ἡ Συνισταμένη R

Σχ. 22.



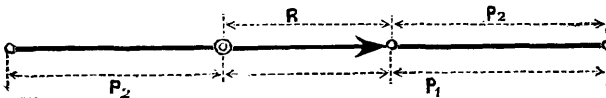
εἶναι κατὰ προσέγγισιν $= P_1 + P_2$, καὶ ὅταν αἱ διευθύνσεις ταυτίζωνται τελείως (Σχ. 22), τότε τὸ παραλληλόγραμμον καταλήγει εἰς μίαν εὐθεῖαν γραμμὴν, ἡ Συνι-

Σχ. 23.



σταμένη R γίνεται $= P_1 + P_2$ καὶ ἔχομεν τότε πρὸ ἡμῶν τὴν περίπτωσιν δύο Δυνάμεων ἐπὶ τῆς αὐτῆς εὐθείας

Σχ. 24.



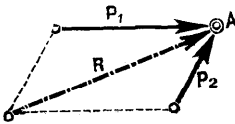
γραμμῆς, τῶν ὁποίων αἱ ἐνέργειαι ἀθροίζονται (ὄρα Σχ. 5 καὶ 6).

Ὅταν αἱ Συνιστώσαι Δυνάμεις ἐνεργῶσι κατὰ διευθύνσεις κατὰ προσέγγισιν ἀντιθέτους (Σχ. 23), τότε εἶναι κατὰ προσέγγισιν ἡ $R = P_1 - P_2$. Καὶ ὅταν αἱ Δυνάμεις εἰσὶν ἀκριβῶς ἀντίθετοι (Σχ. 24), τότε τὸ παραλληλό-

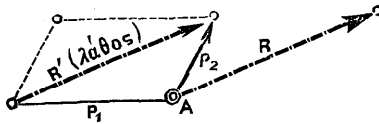
γραμμον καταλήγει καὶ αὐθὶς εἰς μίαν εὐθείαν γραμμὴν· ἔχομεν τότε δύο Δυνάμεις ἐνεργοῦσας ἀντιθέτως μὲν ἀλλ' ἐπὶ τῆς αὐτῆς εὐθείας γραμμῆς, τῶν ὁποίων ἡ κοινὴ ἐνέργεια εἶναι ἰση τῇ διαφορᾷ $R = P_1 - P_2$. ("Ορα καὶ Σχ. 7 καὶ 8).

Παρατήρησις. Τὸ παραλληλόγραμμον τῶν Δυνάμεων δύναται νὰ σχεδιασθῇ ἀκόμη κατὰ τρόπον, ὥστε αἱ Δυνάμεις νὰ φαίνωνται ὡθοῦσαι καὶ οὐχὶ σύρουσαι τὸ

Σχ. 25.

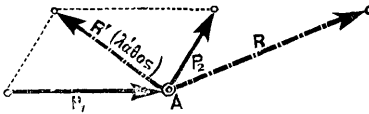


Σχ. 26.



προβαλλόμενον σημεῖον (Σχ. 5). Καταλήγομεν καὶ πάλιν εἰς τὴν αὐτὴν Συνισταμένην, ὡθοῦσαν ὅμως τὸ προσβαλλόμενον σημεῖον. Ὁ τρόπος οὗτος ἐν τούτοις δὲν εἶναι ἄξιος συστάσεως, διότι εὐκόλως γίνεται τὸ λάθος

Σχ. 27.



νὰ σχεδιάζωμεν τὴν μίαν Δύναμιν ὡθοῦσαν καὶ τὴν ἄλλην σύρουσαν, ὅποτε καταλήγομεν εἰς ἐσφαλμένον ἀποτέλεσμα, οἷον ἐμφαίνεται εἰς τὸ Σχ. 26

ἢ 27. Ἐνεκα τοῦ λόγου τούτου σχεδιάζομεν πάντοτε τὰς Δυνάμεις οὕτως ὥστε νὰ φαίνωνται σύρουσαι τὸ σημεῖον προσβολῆς, ὡς τοῦτο γίνεται εἰς τὰ Σχ. 9 — 14.

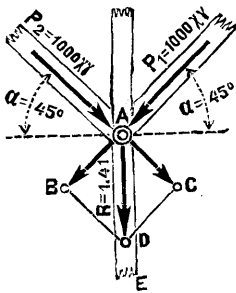
Ἐν ἀνάγκῃ πρέπει αἱ Δυνάμεις νὰ μετατοπίζωνται καταλλήλως ἐπὶ τῶν γραμμῶν ἐνεργείας τῶν.

§ 4. Παραδείγματα.

Εἰς ξύλινος στῦλος ΑΕ (Σχ. 28) ἔχει νὰ ὑποφέρῃ τὴν πίεσιν δύο ἀντηρίδων, ἐκ 1000 χγ. ἐκάστη. Διὰ νὰ εὐ-

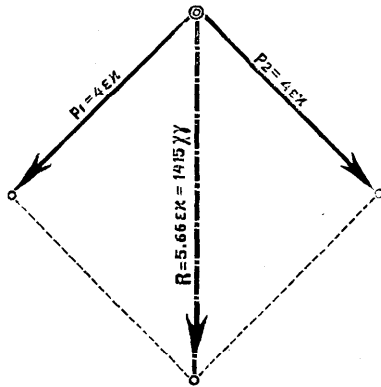
ρωμεν τὴν συνισταμένην τῶν P_1 καὶ P_2 , μετατοπίζομεν τὰς Δυνάμεις ἐπὶ τῶν γραμμῶν ἐνεργείας τῶν μέχρι τοῦ κοινοῦ αὐτῶν σημείου προσβολῆς, τοῦ σημείου συναντήσεως A , κάμνομεν τὴν $AB = P_1 = 1$ ἐκ., τὴν $AC = P_2 = 1$ ἐκ. καὶ σχεδιάζομεν τὸ παραλληλόγραμμον φέροντες ἐκ μὲν τοῦ σημείου C τὴν παράλληλον τῇ P_1 ἐκ δὲ τοῦ σημείου B τὴν παράλληλον τῇ P_2 . Οὕτως εὐρίσκεται ἡ Συνισταμένη $R = AD = 1, 41$ ἐκ. $= 1410$ χγ.

Σχ. 28



Κλίμαξ: 1 ἐκ. $= 1000$ χγ.

Σχ. 29.



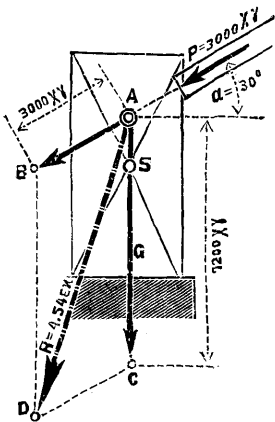
Κλίμαξ: 1 ἐκ. $= 250$ χγ.

Τοσαύτη εἶναι ἡ Πίσις, ἣν ἔχει νὰ ὑποφέρει ὁ Στῦλος AE .

Διὰ νὰ εὐρωμεν ἀκριβέστερον τὸ Μέγεθος τῆς Συνισταμένης, τὸ συνηθέστερον εἶναι ἀνάγκη νὰ σχεδιάζωμεν τὰς Δυνάμεις εἰς μεγαλειτέραν κλίμακα ἐκείνης μετὰ τὴν ὁποίαν ἔχει σχεδιασθῇ ὁ Στῦλος καὶ τὸ ἔργον (Στέγη, Γέφυρα κλ.) εἰς ὃ ὁ ὑπ' ὄψει Στῦλος ἀνήκει. Ἐκ τοῦ Σχ. 29 προκύπτει $R = 5, 66$ ἐκ. $= 1415$ χγ.

Ἐν λίθινον Βάθρον ὠθεῖται ὑπὸ ἀντηρίδος μετὰ Δύναμιν $P = 3000$ χγ. Τὸ βάρος τοῦ βάθρου εἶναι

$G = 7200$ γγ, καὶ ἐνεργεῖ εἰς τὸ κέντρον βαρύτητος S .
Τὸ σημεῖον A συναντήσεως τῶν γραμμῶν ἐνεργείας τῶν
δύο Δυνάμεων P καὶ G εἶναι κοινὸν ἀμφοτέρων τῶν
Σχ. 30.



Δυνάμεων τούτων σημεῖον. Μέ-
χρι τοῦ σημείου τούτου μετατοπί-
ζομεν τὰς ἐν λόγῳ Δυνάμεις καὶ
σχεδιάζομεν τὸ παραλληλόγραμ-
μον $ABDC$ καὶ εὐρίσκομεν
 $R = AD = 4, 54 \text{ εκ.} = 9080 \text{ γγ.}$

Τοσαύτη εἶναι ἡ Πίεσις, ἣν ἐξα-
σκεῖ τὸ Βάθρον ἐπὶ τῶν θεμε-
λίων του.

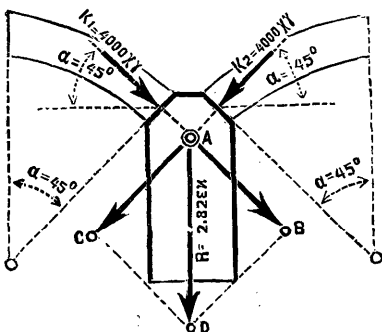
Θέματα. Νὰ ἐπαναληφθῇ τὸ
θέμα τοῦ Σχ. 28, ἀλλὰ μὲ γω-
νίαν τῶν Ἀντηρίδων $\alpha = 30^\circ$
ἀντὶ τῶν 45° .

Κλίμαξ: $1 \text{ εκ.} = 2000 \text{ γγ.}$

Τὸ αὐτὸ μὲ γωνίαν $\alpha = 60^\circ$.

Τὸ αὐτὸ μὲ Δυνάμεις $P_1 = P_2 = 2000, 2500$ καὶ 3000 γγ.

Σχ. 31.



Νὰ ἐπαναληφθῇ τὸ θέ-
μα τοῦ Σχ. 30, ἀλλὰ μὲ
γωνίαν α τῆς Ἀντηρίδος
 45° ἀντὶ τῶν 30° .

Τὸ αὐτὸ μὲ γωνίαν
 $\alpha = 60^\circ$.

Τὸ αὐτὸ μὲ Δύναμιν
 $P = 2500, 2000$ καὶ
 2500 γγ.

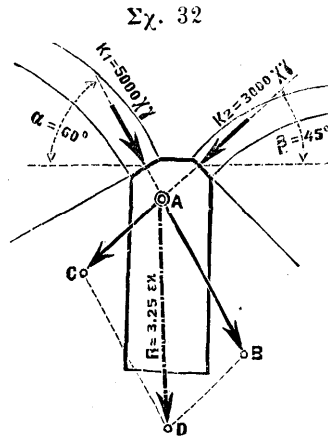
Ἐν λίθινον Βάθρον

(Σχ. 31) ἔχει νὰ ὑποφέρει
τὰς Πιέσεις K_1 καὶ K_2 δύο ἐκατέρωθεν θόλων.

Κλίμαξ: $1 \text{ εκ.} = 2000 \text{ γγ.}$

Μετατοπίζομεν τὰς Δυνάμεις ταύτας μέχρι τοῦ σημείου Α συναντήσεως τῶν γραμμῶν ἐνεργείας τῶν καὶ συνθέτομεν αὐτάς, ἐφαρμόζοντες τὸ παραλλيلόγραμμον τῶν Δυνάμεων $ABDC$, εἰς μίαν Συνισταμένην $R=AD=2,82$ ἐκ.=5640 χγ. Τόση εἶναι ἡ Πίεσις, ἣν ἀμφότεροι οἱ θόλοι ἐξασκοῦσιν ἐπὶ τοῦ Βάθρου.

Εἰς τὸ Σχ. 32 αἱ πίεσεις τῶν ἐκατέρωθεν τοῦ Βάθρου θόλων εἰσὶ 5000 καὶ 3000 χγ. Μετατοπίζομεν καὶ ἐνταῦθα τὰς Δυνάμεις K_1 καὶ K_2 μέχρι τῆς συναντήσεως τῶν (Α) καὶ σχεδιάζομεν τὸ παραλλيلόγραμμον τῶν Δυνάμεων $ABDC$. Ἡ Συνισταμένη $R=AD=3,25$ ἐκ.=6500 χγ. ἐκφράζει τὴν πίεσιν, ἣν ὑφίσταται τὸ Βάθρον ὑπ' ἀμφοτέρων τῶν θόλων.



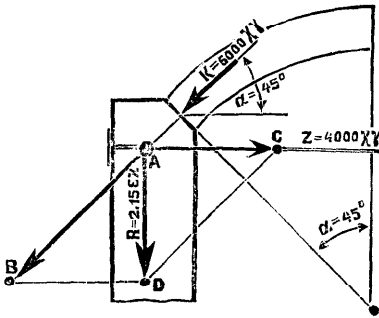
Κλίμαξ: 1 ἐκ.=2000 χγ.

Θέματα. Ἐκλέγομεν τὴν γωνίαν α εἰς τὸ Σχ. 31 ἴσην πρὸς 30° ἀντὶ τῶν 45° . Ἐπίσης λαμβάνομεν ἐκ νέου τὴν $\alpha=60^\circ$ Τροποποιοῦμεν τὸ Σχ. 32 οὕτως ὥστε νὰ ἔχωμεν $\alpha=45^\circ$ καὶ $\beta=30^\circ$ καὶ ἐπαναλαμβάνομεν τὸ θέμα.

Θόλος τις, τοῦ ὁποίου ἡ εἰς τοὺς ἀθλητὰς πίεσις K εἶναι 6000 χγ., ὑποστηρίζεται ὑπὸ Βάθρου τινὸς (Σχ. 33). Πρὸς ἐξουδετέρωσιν τῆς πλευρικῆς ἀθήσεως ἐλκύεται τὸ Βάθρον πρὸς τὸ ἐσωτερικὸν τοῦ θόλου διὰ σιδηροῦ τριγώνου ἐλκυστήρος, τοῦ ὁποίου ἡ ἐλκύνουσα δύναμις Z εἶναι 2000 χγ. Ἀμφότερας τὰς Δυνάμεις K καὶ Z μετατοπίζομεν μέχρι τοῦ σημείου Α συναντήσεως καὶ σχεδιάζομεν τὸ σχε-

τικόν παραλληλόγραμμον τῶν Δυνάμεων, τὸ $ABDC$. Τῇ Συνισταμένῃ $R = AD = 2,15$ ἐκ. $= 4300$ χγ. παριστᾷ

Σχ. 33



τὴν πίεσιν, ἵν' ὁ θόλος καὶ ὁ ἐλκυστήρ ὁμοῦ ἀσκοῦσιν ἐπὶ τοῦ Βάθρου.

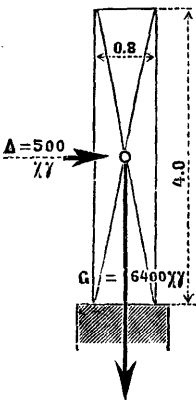
Παρατήρησις. Τροποποιούμεν τὸ Σχ. 33 λαμβάνοντες τὴν γωνίαν $\alpha = 30^\circ$.

Ἐπαναλαμβάνομεν τὸ αὐτὸ μὲ γωνίαν $\alpha = 60^\circ$.

Ἐπαναλαμβάνομεν τὸ αὐτὸ ἐκλέγοντες τὰς Δυνάμεις K καὶ Z ταυτο-

χρόνως $K = 5000, 4500, 4000$ χγ. καὶ $Z = 3500, 3000, 2500$ χγ.

Σχ. 34



Εἰς τὸ Σχ. 34 ὁ ἄνεμος ἀθεῖ τοῖχόν τινα διὰ Δυνάμεως $D = 500$ χγ.

Τὸ βάρος τοῦ τοίχου τούτου εἶναι 6400 χγ. Εὕρεῖν τὴν Συνισταμένην ἀμφοτέρων, ἥτις θὰ παριστᾷ τὴν ὑπ' ἀμφοτέρων τῶν Δυνάμεων τούτων ἀσκουμένην ἐπὶ τοῦ βάθρου Πίεσιν.

Ἐπαναλαμβάνομεν τὸ αὐτὸ διὰ πίεσιν ἀνέμου $D = 1000$ χγ.

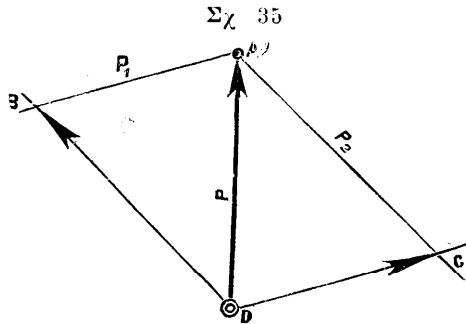
§ 5. Ἀποσύνθεσις μιᾶς Δυνάμεως εἰς δύο Συνιστώσας.

Συνηθέστερον τῆς πράξεως τῆς συνθέσεως τῶν Δυνάμεων παρουσιάζεται τὸ ἀντίθετον πρόβλημα τῆς ἀποσυνθέσεως μιᾶς Δυνάμεως εἰς δύο, ἥτοι τὸ πρόβλημα τῆς ἀναζητήσεως δύο Δυνάμεων, τῶν ὁποίων ἡ

κοινή ἐνέργεια εἶναι ἴση τῇ ἐνεργείᾳ τῆς δεδομένης.

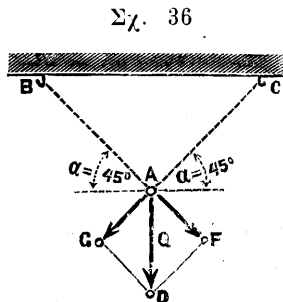
Καὶ τὸ πρόβλημα τοῦτο λύεται τῇ βοηθείᾳ τοῦ παραλληλογράμμου τῶν Δυνάμεων (Σχ. 35)· ἀλλ' ὑπάρχει ἡ διαφορά ὅτι ἐνταῦθα εἶναι δεδομένη ἡ διαγώνιος μόνον.

Τῶν Συνιστωσάν εἰσι συνίθως γνωσταὶ αἱ διευθύνσεις (αἱ γραμμαὶ ἐνεργείας). Τὰ μεγέθη δ' αὐτῶν προσδιορίζονται ὡς ἑξῆς :



Ἐκ τῶν ἄκρων τῆς δεδομένης Δυνάμεως χαράσσομεν παραλλήλους πρὸς τὰς δύο δεδομένας διευθύνσεις τῶν ζητούμενων Συνιστωσῶν. Σχηματίζεται οὕτως παραλληλόγραμμον (Σχ. 35), ἐν τῷ ὁποίῳ ἡ δεδομένη Δύναμις $P = AD$ εἶναι ἡ διαγώνιος καὶ αἱ δύο πλευραὶ $AB = P_1$ καὶ $AC = P_2$ εἰσὶν αἱ ζητούμεναι Συνιστώσαι.

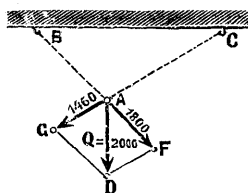
Ποράδειγμα. Φορτίον Q κρέμεται ἐκ δύο σχοινίων AB καὶ AC (Σχ. 36). Αἱ προκαλούμεναι εἰς τὰ σχοινία ἀντῶσεις πρέπει νὰ εὐρίσκωνται ἐν ἰσορροπίᾳ πρὸς τὸ φορτίον Q , ἐὰν θέλωμεν νὰ τὸ διατηρήσωμεν ἐν τῇ μετεώρῳ ταύτῃ καταστάσει. Διὰ νὰ εὐρωμεν τὸ μέγεθος τῶν ἀντῶσεων τῶν Σχοινίων, πρέπει ν' ἀποσυνθέσωμεν τὸ φορτίον Q εἰς δύο Δυ-



νάμεις, αἵτινες ἔχουσι τὰς διευθύνσεις τῶν σχοινίων AB καὶ AC . Πρὸς τὸν σκοπὸν τοῦτον χαράσσομεν ἐκ τῶν ἄκρων τῆς Q παραλλήλους τῇ AB καὶ AC ὁπότε σχηματίζεται τὸ παραλληλόγραμμον $AFDG$, ἐν τῷ ὁποίῳ ἡ μὲν δεδομένη Δύναμις Q εἶναι ἡ Συνισταμένη, αἱ δὲ AF καὶ AG αἱ δύο Συνιστώσαι, ἵτοι αἱ ζητούμεναι ἀντάσεις τῶν σχοινίων AB καὶ AC , κατὰ τῶν ὁποίων ἀντεπεξέρχεται ἡ φυσικὴ ἀντοχὴ τῶν σχοινίων τούτων.

Δὲν εἶναι δύσκολον νὰ πειραματισθῶμεν κατὰ τὸ ὑπόδειγμα τοῦ Σχ. 36. Δυνάμεθα τότε νὰ βεβαιωθῶμεν κατὰ εὐκόλον τρόπον ἐὰν τῷ ὄντι ἀναπτύσσωνται ἀντάσεις εἰς τὰ σχοινία AB καὶ AC , παρεισάγοντες ἀπλοῦς ζυγοὺς (ἐξ ἐκείνων οὗς εὐρίσκομεν ἐν τῷ ἐμπορίῳ) ἐφωδιασμένους μὲ ἀρπάγας.

Σχ. 37



Οἱ Ζυγοὶ δεικνύουσι τὰς ζητούμενας ἀντάσεις φυσικῶς εἰς βαθμὸν ἀκριβείας, οἷον εἶναι δυνατόν ν' ἀξιῶμεν ἀπὸ τόσον ἀπλὰ ἐργαλεῖα.

Τὰ μήκη AB καὶ AC τῶν σχοινίων καθὰς καὶ ἡ κλίσις αὐτῶν (γωνία ἢν σχηματίζουν μετὰ τῆς ὀρι-

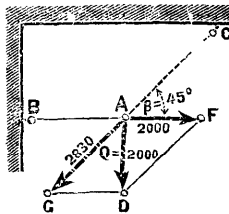
Κλίμαξ: 1 ἐκ.=2000 χγ. ζοντίου) δύνανται νὰ ᾤσι διάφορα (Σχ. 37). Κατὰ τὸν αὐτὸν τρόπον χαράσσομεν ἐκ τῶν ἄκρων A καὶ D παραλλήλους γραμμὰς τῇ AB καὶ AC καὶ εὐρίσκομεν τὴν ἀντίωσιν τοῦ σχοινίου AB ἴσην πρὸς τὴν $AF=1800$ χγ. καὶ τὴν τοῦ σχοινίου AC ἴσην πρὸς τὴν $AG=1460$ χγ. Δυνατὸν μάλιστα νὰ συμβῇ ἵνα τὸ ἐν τῶν σχοινίων νὰ εἶναι ὀριζόντιον (Σχ. 38). Εἰς τὸ Σχῆμα τοῦτο εὐρίσκομεν ἀντίωσιν τοῦ σχοινίου AB ἴσην πρὸς τὴν $AF=2000$ χγ. καὶ τὴν τοῦ σχοινίου AC ἴσην πρὸς τὴν $AG=2830$ χγ.

Τὸ ὄρθον τῆς ἀνωτέρω πράξεως καλῶς καὶ τῶν εἰς τὰ Σχ. 39, 40 καὶ 41 ἀναφερομένων ἀποδεικνύεται διὰ πειραμάτων ὁμοίων τῇ τοῦ Σχ. 36.

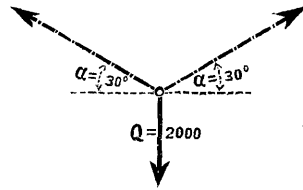
Θέματα. Εὑρεῖν τὰς ἀντάσεις τῶν σχοινίων τοῦ Σχ. 39.

Τὸ αὐτὸ διὰ γωνίαν $\alpha=20^0$, 10^0 .

Σχ. 38

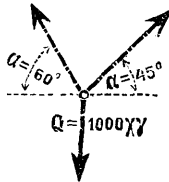


Σχ. 39

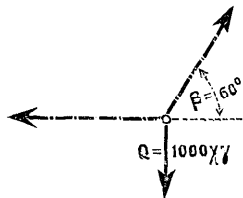


Κλίμαξ: 1 ἐκ. = 2000 χγ.

Σχ. 40



Σχ. 41



Εὑρεῖν τὰς ἀντάσεις τῶν σχοινίων τοῦ Σχ. 40.

Τὸ αὐτὸ διὰ γωνίας $\alpha=30^0$ καὶ $\beta=20^0$.

Τὸ αὐτὸ διὰ γωνίας $\alpha=10^0$ καὶ $\beta=20^0$.

Τὸ αὐτὸ διὰ γωνίας $\alpha=20^0$ καὶ $\beta=10^0$.

Εὑρεῖν τὰς ἀντάσεις τῶν σχοινίων τοῦ Σχ. 41.

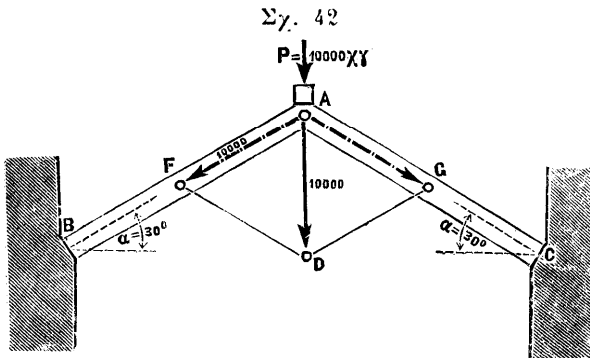
Τὸ αὐτὸ διὰ γωνίαν $\beta=20^0$.

Τὸ αὐτὸ διὰ γωνίαν $\beta=10^0$.

Ἐπὶ τῶν δύο ἀλληλοστηριζομένων Ἀρμειόντων ἐνὸς Ζευκτοῦ ἐνεργεῖ φορτίον $P=10000$ χγ. (Σχ. 42). Τὸ φορ-

τίον τοῦτο ὑποβαστάζεται ὑπὸ τῶν δύο Ἀρειβόντων AB καὶ AC , τῶν ὁποίων τὰ ἄκρα B καὶ C ἐρείδονται ἐπὶ λιθίνων Βάθρων.

Ἐπὶ τοῦ προκειμένου πρέπει ν' ἀντικαταστήσωμεν τὸ φορτίον P διὰ δύο Δυνάμειν, αἵτινες ἔχουσι τὰς διευθύνσεις τῶν Ἀρειβόντων, ἥτοι ν' ἀποσυνθέσωμεν τὴν Δύναμιν P . Πρὸς τὸν σκολὸν τοῦτον κάμνομεν τὴν $AD=P$ καὶ φέρομεν ἐκ τῆς A καὶ D τὰς παραλλήλους ταῖς δε-



Κλίμαξ: 1 ἐκ. = 5000 χγ.

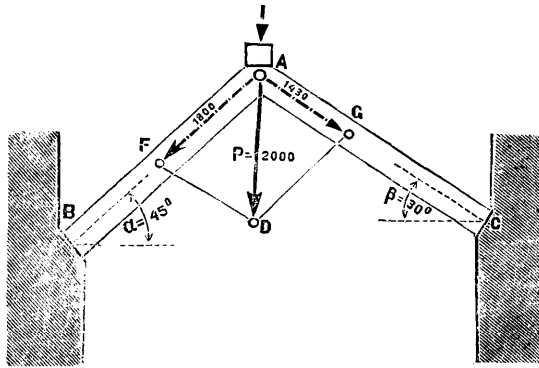
δομέναις διευθύνσεσι AB καὶ AC . Οὕτω σχηματίζεται τὸ παραλληλόγραμμον $AFDG$, ἐν τῷ ὁποίῳ ἡ δεδομένη Δύναμις εἶναι ἡ Συνισταμένη, αἱ δὲ AF καὶ AG αἱ δύο Συνιστασαι Δυνάμεις, αἵτινες ἐνεργοῦσιν ἐπὶ τῶν Ἀρειβόντων.

Εἰς τὸ Σχ. 43 εἰσὶν αἱ κλίσεις τῶν ἀρειβόντων διάφοροι. Τὰς Δυνάμεις AF καὶ AG εὗρίσκομεν ὥπως καὶ εἰς τὸ προηγούμενον παράδειγμα, φέροντες παραλλήλους ταῖς AB καὶ AC . Εἰς τὴν προκειμένην περίπτωσιν αὐταὶ εἰσὶν διάφοροι, $AF = 1800$ χγ., $AG = 1430$ χγ.

Θέματα. Νὰ προσδιορίσωμεν τὰς πιέσεις τῶν Ἀρει-

φόντων ἐνὸς Ζευκτοῦ κατὰ τὸ Σχ. 42 μὲ γωνίαν $\alpha=20^0$.
Τὸ αὐτὸ μὲ γωνίαν $\alpha=15^0$.

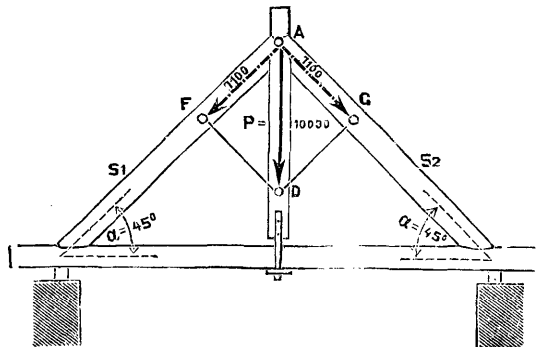
Σχ. 43



Κλίμαξ: 1 ἐκ. = 1000 χγ.

Εὑρεῖν τὰς πιέσεις τῶν Ἀμειβόντων ἐνὸς Ζευκτοῦ κατὰ
τὸ Σχῆμα 43 μὲ γωνίας κλίσεως ὁμως $\alpha=30^0$, $\beta=20^0$.
Τὸ αὐτὸ μὲ $\alpha=20^0$ καὶ $\beta=15^0$.

Σχ. 44



Κλίμαξ: 1 ἐκ. = 5000 χγ.

Τὸ αὐτὸ μὲ $\alpha=30^0$ καὶ $\beta=15^0$.

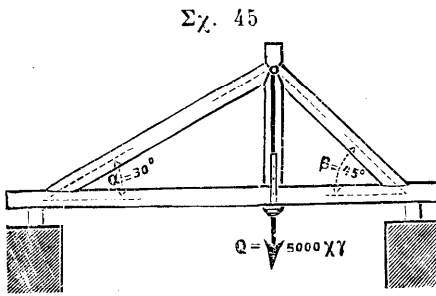
Τὸ φορτίον, ὅπερ κρέμαται εἰς τὸν ὀρθοστάτην ἀπλοῦ

τινος Ζευκτοῦ (Σχ. 44) προκαλεῖ μίαν ἐφελκύνουσαν τοῦ ὀρθοστάτου Δύναμιν (ἀντωσιν) ἴσιν πρὸς 10000 χγ.

Ὁ αὐτὸς ὀρθοστάτης συγκρατεῖται εἰς τὸ ἄνω ἄκρον ὑπὸ τῶν Ἀρειβόντων S_1 καὶ S_2 τοῦ Ζευκτοῦ.

Αἱ εἰς τοὺς Ἀρειβόντας προκαλούμεναι Δυνάμεις (θλίψεις) εὐρίσκονται, ὅπως εἰς τὰ προηγούμενα παραδείγματα, διὰ τοῦ παραλληλογράμμου $AFD\Gamma$ τῶν Δυνάμεων. $AF=AG=7100$ χγ.

Θέματα. Τροποποιήσωμεν τὸ Σχ. 44 οὕτως ὥστε ἡ



κλίσις τῶν Ἀρειβόντων νὰ εἶναι $\alpha = 30^\circ$ καὶ προσδιορίσωμεν τὰς σχετικὰς θλίψεις τῶν Ἀρειβόντων. Πράζωμεν τὸ αὐτὸ μὲ γωνίαν $\alpha = 20^\circ$.

Προσδιορίσωμεν

τὰς θλίψεις τῶν Ἀρειβόντων τοῦ Ζευκτοῦ τοῦ Σχ. 45.

Τροποποιήσωμεν τὸ Σχ. 45 οὕτως ὥστε νὰ ἔχωμεν $\alpha = 20^\circ$ καὶ $\beta = 30^\circ$ καὶ ἐπαναλάβωμεν τὸ θέμα.

Πράζωμεν τὸ αὐτὸ μὲ γωνίας $\alpha = 45^\circ$ καὶ $\beta = 20^\circ$.

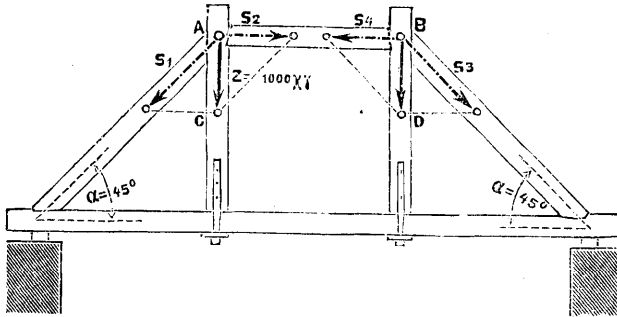
Εἰς σύνθετόν τι Ζευκτόν (Σχ. 46) ἕκαστος ὀρθοστάτης ὑποφέρει, ἔνεκα τοῦ κρεμαμένου ὑπ' αὐτὸν φορτίου, ἀντωσιν $Z = 10000$ χγ.

Εὐρίσκομεν ὡς καὶ πρότερον διὰ τοῦ παραλληλογράμμου τῶν Δυνάμεων τὰς εἰς τοὺς Ἀρειβόντας καὶ τὴν ἐνδιάμεσον δοκὸν AB γεννωμένας Δυνάμεις.

Πρὸς τὸν σκοπὸν τοῦτον καθιστῶμεν τὰ μήκη AC καὶ BD ἴσα πρὸς τὰς δεδομένας Δυνάμεις Z , καὶ φέρομεν τὰς παραλλήλους. Οὕτως ἔχομεν τὰς ζητούμενὰς Συνι-

στάσας S_1 καὶ S_2 καθὼς καὶ τὰς S_3 καὶ S_4 . Αἱ ἴσαι καὶ ἐπὶ τῆς αὐτῆς γραμμῆς AB ἀλλ' ἀντιθέτως ἐνεργοῦσαι Δυνάμεις S_2 καὶ S_4 εὐρίσκονται ἐν ἰσορροπία.

Σχ. 46



Κλίμαξ: 1 εκ = 1000 χγ.

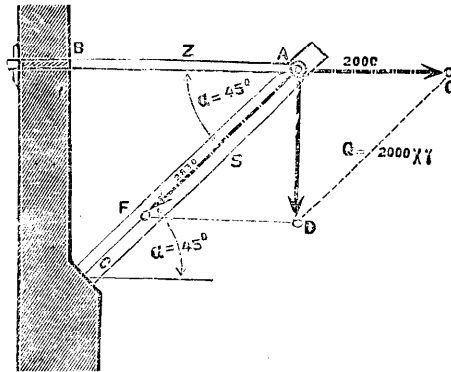
Θέματα. Τροποποιήσωμεν τὸ Σχ. 46 οὕτως ὥστε νὰ ἔχωμεν $\alpha = 30^\circ$ καὶ προσδιορίσωμεν τὰς εἰς τὴν ἐνδιάμεσον δοκὸν καὶ τοὺς Ἀμείβοντας γεννωμένας Δυνάμεις.

Σχ. 47

Πράξωμεν τὸ αὐτὸ διὰ $\alpha = 20^\circ$.

Εἰς τὸ Σχ. 47 πλαγία τις δοκὸς φορτωμένη εἰς τὸ ἄκρον αὐτῆς διὰ φορτίου $Q = 2000$ χγ. διατηρεῖται εἰς τὴν θέσιν της διὰ τινος ἐλκυστήρος.

Τὸ φορτίον Q προκαλεῖ εἰς μὲν τὴν δοκὸν μίαν θλίβουσαν Δύναμιν, εἰς δὲ τὸν ἐλκυστήρα μίαν ἐφελ-



Κλίμαξ: 1 εκ. = 1000 χγ.

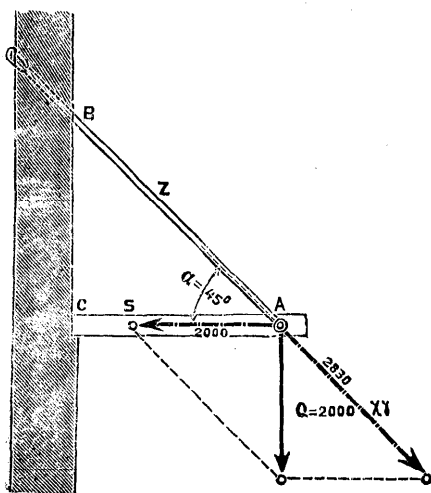
κύουσαν Δύναμιν (άντωσιν), αἱ ὁποῖαι εὐρίσκονται ἐν ἰσορροπίᾳ πρὸς τὸ δεδομένον φορτίον Q .

Εὐρίσκομεν τὰ μεγέθη τῶν εἰς τὴν πλαγίαν δοκὸν καὶ τὸν ἐλκυστήρα ἐνεργουσῶν Δυνάμεων ἀποσυνθέτοντες τὸ Q κατὰ τὰς διευθύνσεις AB καὶ AC , ἥτοι φέροντες ἐκ τῶν ἁκρῶν A καὶ D παραλλήλους ταῖς δεδομέναις διευθύνσεσι Z καὶ S τῶν ζητουμένων Δυνάμεων. Σχηματίζεται οὕτω τὸ παραλληλόγραμμον $AFD\Gamma$. Ἐν τούτῳ εἶναι ἡ AD τὸ δεδομένον φορτίον $Q=2000$ χγ., $AF=2830$ χγ., ἡ θλίψις τῆς πλαγίας δοκοῦ, καὶ $AG=2000$ χγ. ἡ άντῶσις τοῦ ἐλκυστήρος.

Περὶ τῆς ἀκριβείας τῶν εὑρεθεισῶν Δυνάμεων δυνάμεθα, τοῦλάχιστον διὰ τὸν ἐλκυστήρα, νὰ βεβαιωθῇ μεν πειραματιζόμενοι ἐπὶ

Σχ. 48

ἑνὸς κατασκευάσματος κατὰ τὸ ὑπόδειγμα τοῦ Σχ. 47, παρεμβάλλοντες καὶ ἕτερον ζυγόν, καθ' ὃν τρόπον εἵπομεν ὅτι γίνεται διὰ τὸ Σχ. 36. Τὸ αὐτὸ δύναται νὰ γείνηται καὶ διὰ τὰ ἐπόμενα Σχ. 48-53.



Κλίμαξ: 1 εκ. = 1000 χγ.

καὶ τὸν ἐλκυστήρα τοῦ Σχ. 47 ἐνεργούσας Δυνάμεις διὰ γωνίαν τῆς πλαγίας δοκοῦ $\alpha=30^\circ$

Πράξωμεν τὸ αὐτὸ διὰ $\alpha=20^\circ$.

Θέμα α. Προσδιορίσωμεν τὰς εἰς τὴν πλαγίαν δοκὸν

Τὸ αὐτὸ διὰ $\alpha=15^\circ$.

Εἰς τὸ Σχ. 48 αἱ διευθύνσεις τῆς δοκοῦ καὶ τοῦ ἔλκυστήρος εἰσιν ἐντελᾶς διάφοροι. Ἐν τούτοις ἡ ἀποσύνθεσις τῆς δεδομένης Δυνάμεως (τοῦ φορτίου Q) γίνεται κατὰ τὸν αὐτὸν τρόπον διὰ τοῦ παραλληλογράμμου. Οὕτως εὐρίσκομεν τὰς Δυνάμεις, εἰς μὲν τὴν δοκὸν $AB=2830$ χγ. (θλίψιν), εἰς δὲ τὸν ἔλκυστήρα $AC=2000$ χγ. (ἄντωση).

Θέματα. Τροποποιήσωμεν τὸ Σχ. 48 οὕτως ὥστε ἡ γωνία τοῦ ἔλκυστήρος νὰ εἶναι $=30^\circ$ καὶ ἐπαναλάβωμεν τὸ θέμα.

Πράξωμεν τὸ αὐτὸ διὰ γωνίαν $\alpha=20^\circ$.

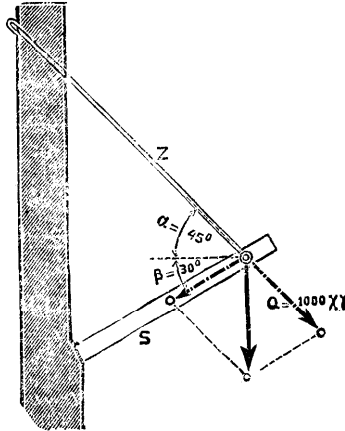
Προσδιορίσωμεν τὰς Δυνάμεις τῆς δοκοῦ S καὶ τοῦ ἔλκυστήρος Z , αἵτινες προκαλοῦνται ὑπὸ τοῦ φορτίου $Q=1000$ χγ. εἰς τὸ Σχ. 49.

Ἐπαναλάβωμεν τὸ αὐτὸ μὲ γωνίας $\alpha=45^\circ$ $\beta=45^\circ$.

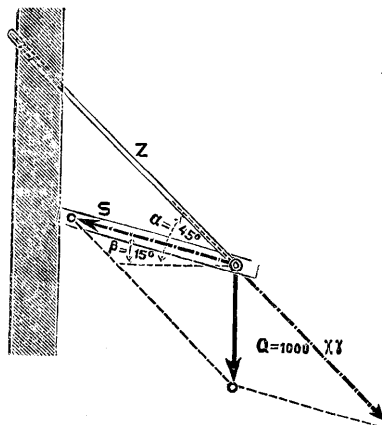
Τὸ αὐτὸ μὲ $\alpha=30^\circ$, $\beta=20^\circ$.

Τὸ αὐτὸ μὲ $\alpha=20^\circ$, $\beta=20^\circ$.

Σχ. 49



Σχ. 50



Προσδιορίσαμεν τὰς Δυνάμεις τῆς δοκοῦ καὶ τοῦ ἐλ-
κυστήρος τοῦ Σχ. 50.

Πράξαμεν τὸ αὐτὸ μὲ οἰαςδήποτε ἄλλας γωνίας α καὶ β .

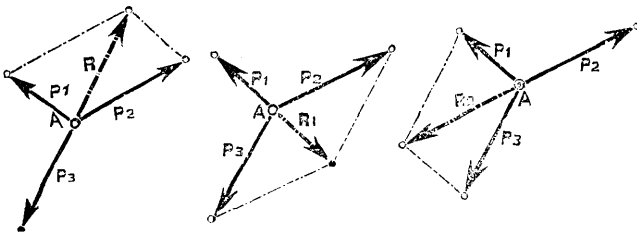
§ 6. Ἱσορροπία τριῶν Δυνάμεων εἰς ἓν σημεῖον.

Ὅταν ἐνεργῶσιν ἐφ' ἐνὸς σημείου A (Σχ. 51) δύο Δυ-
νάμεις P_1 καὶ P_2 , ἐξασκοῦσιν αὐταὶ τὴν αὐτὴν ἐνέργειαν,
οἷαν καὶ ἡ Συνισταμένη των R . Ἐὰν δὲ ταυτοχρόνως
ἐνεργῇ εἰς τὸ σημεῖον A τρίτη τις Δύναμις P_3 ἴση μὲν τῷ
μέγεθος τῇ R_1 ἀλλ' ἀντιθέτου διευθύνσεως, τότε ἡ ἐνέρ-
γεια τῆς Συνισταμένης R ἐξουδετεροῦται. Τὸ σημεῖον A

Σχ. 51

Σχ. 52

Σχ. 53



δὲν δύναται νὰ μετακινηθῇ, διότι αἱ ἐπ' αὐτοῦ ἐνεργοῦσαι
δυνάμεις εὐρίσκονται ἐν ἰσορροπίᾳ. Δυνάμεθα ἀκόμη νὰ
εἰπωμεν: Αἱ τρεῖς Δυνάμεις P_1 , P_2 καὶ P_3 εὐρίσκονται ἐν
ἰσορροπίᾳ. Ὅταν συμβαίνει τοιοῦτόν τι, τότε καὶ ἡ Δύνα-
μις P_1 πρέπει νὰ εἶναι ἴση τῷ μέγεθος καὶ ἀντίθετος τῇ
Συνισταμένῃ R_1 τῆς P_2 καὶ P_3 (Σχ. 52), καθὼς ἐπίσης
καὶ ἡ P_2 πρέπει νὰ εἶναι ἴση τῷ μέγεθος καὶ ἀντίθετος
τῇ Συνισταμένῃ R_2 τῆς P_1 καὶ P_3 (Σχ. 53).

Τὰ ἀνωτέρω ἀποδεικνύονται ἐξ αὐτῆς τῆς ἀκριβοῦς σχε-
διάσεως τῶν σχετικῶν πρᾶξεων.

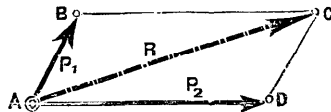
ΚΕΦΑΛΑΙΟΝ Β'

ΣΥΝΘΕΣΙΣ ΔΥΝΑΜΕΩΝ ΠΛΕΙΟΤΕΡΩΝ ΤΩΝ ΔΥΟ

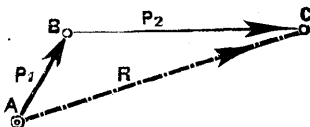
§ 7. Τὸ Δυναμοτρίγωνον.

Τὴν Συνισταμένην R δύο Δυνάμεων P_1 καὶ P_2 (Σχ. 54) δυνάμεθα πρὸς τούτοις νὰ εὕρωμεν ἑάν, ἀντὶ ὁλοκλήρου τοῦ παραλλήλογραμμοῦ τῶν Δυνάμεων, σχεδιάσωμεν μόνον τὸ ἥμισυ, τὸ τρίγωνον ABC (Σχ. 55) ἢ τὸ ADC (Σχ. 56). Ἐν τοιαύτῃ περιπτώσει, σχεδιάζομεν ἀρχίζοντες ἀπὸ τὸ σημεῖον ἐφαρμογῆς, τὴν μίαν κατόπιν τῆς ἄλλης τὰς δύο Δυνάμεις, διατηροῦντες τὰς αὐτὰς διευθύνσεις τῶν βελῶν. Ἡ σειρά ὀρίζεται κατὰ βούλησιν. Ἡ τεθλασμένη γραμμὴ ABC ἢ ADC καλεῖται ὁ « Δυναμο-

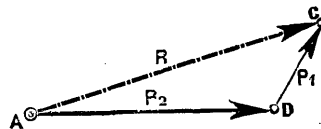
Σχ. 54



Σχ. 55



Σχ. 56



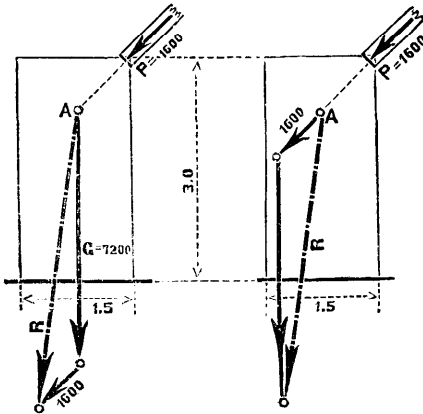
συρμός», ἡ δὲ γραμμὴ AC , ἡ ὁποία παριστᾷ τὴν Συνισταμένην R ἢ «Κλειδογραμμὴ» του.

Παραδείγματα. Ἀθῆνον Βάθρον (Σχ. 57) ὠθεῖται ὑπὸ Ἀρμείβοντος διὰ Δυνάμεως $P=1600$ χγ.

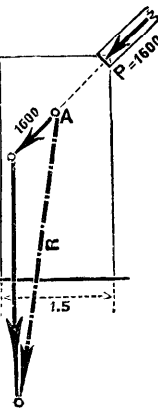
Τὸ Βάθρον βάθους $1,0$ μέτρου ἔχει ὄγκον $3,0 \times 1,5 \times 1,0 = 4,5$ κυβικὰ μέτρα. Ἐν κυβ. μ. βαρύνει 1600 χγ.

Συνεπώς τὸ ὅλον Βάθρον ἔχει βάρος $G=4,5 \times 1600=7200$ ΧΥ, ἐνεργεῖ δὲ εἰς τὸ μέσον.

Σχ. 57



Σχ. 58



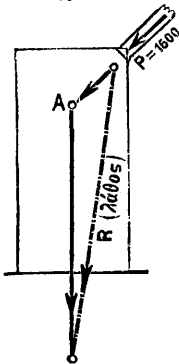
Ἀμφότεραι αἱ Δυνάμεις P καὶ G δύνανται νὰ συντεθῶσιν εἰς μίαν Συνισταμένην R κατὰ τὸ Σχ. 57 ἢ 58.

Παρατήρησις.

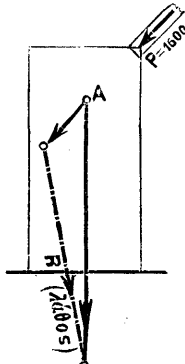
Ἀρχάριοι ὑποπιπτουσιν ἐνίοτε εἰς τὸ λάθος νὰ σχεδιάζωσι τὸ Δυναμοτριγώνον κατὰ τὸ Σχ. 59, ὅποτε τὸ σημεῖον προσβολῆς

Ἀ συμπίπτει εἰς τὸ μέσον τοῦ Δυναμοσυρμοῦ. Καὶ ἔχει μὲν καὶ πάλιν ἡ Συνισταμένη R τὸ ὀρθὸν μέγεθος, ἀλλ'

Σχ. 59



Σχ. 60



οὐχὶ καὶ τὴν ἀκριβὴ αὐτῆς θέσιν. Ἐτι σφαιερὰ εἶναι ἡ κατὰ τὸ Σχ. 60 διάταξις.

Θέματα. Νὰ διεξαχθῶσιν ἐκ νέου τὰ θέματα τῆς § 4 τῇ βοήθειᾳ τοῦ Δυναμοτριγώνου.

§ 8. Τὸ Δυναμοπολύγωνον.

Εἰς τὸ Σχ. 61 ἐνεργοῦσιν εἰς ἓν σημεῖον O τέσσαρες Δυνάμεις. Ἐν πρώτοις εὐρίσκομεν διὰ τοῦ παραλληλογράμμου τῶν Δυνάμεων τὴν Συνισταμένην R_1 τῶν

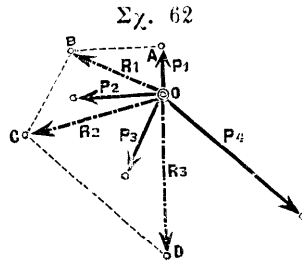
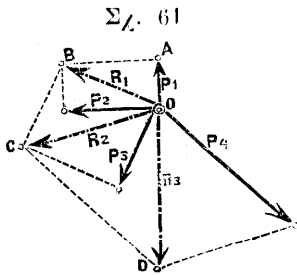
παραλλήλων Δυνάμεων. Ἐν πρώτοις εὐρίσκομεν διὰ τοῦ παραλληλογράμμου τῶν Δυνάμεων τὴν Συνισταμένην R_1 τῶν

P_1 καὶ P_2 , κατόπιν τὴν Συνισταμένην R_2 τῶν R_1 καὶ P_3 , μετὰ ταῦτα τὴν Συνισταμένην R_3 τῶν R_2 καὶ P_4 .

Προφανῶς ἡ τελευταία Συνισταμένη R_3 , ἡ ἐνεργοῦσα ἐπὶ τοῦ αὐτοῦ κοινοῦ σημείου προσβολῆς τῶν δεδομένων Δυνάμεων ἀντικαθιστᾷ τὴν ἐνέργειαν πασῶν ὁμοῦ τῶν Δυνάμεων τούτων.

Τὸ Σχέδιον ἀπλοποποιεῖται ὅταν συνθέσωμεν τὰς Δυνάμεις διὰ τῶν τριγώνων (Σχ. 62).

Εἰς τὰ Σχ. 61 καὶ 62 εἶναι ἡ $OA = P_1$, ἡ AB ἴση καὶ παράλληλος τῇ P_2 , ἡ BC ἴση καὶ παράλληλος τῇ P_3 , ἡ CD ἴση καὶ παράλληλος τῇ P_4 .



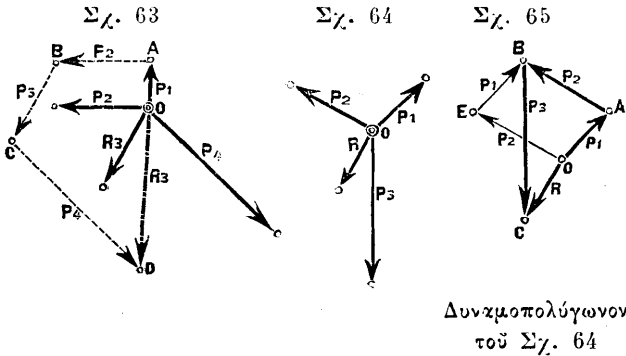
Δυνάμεθα λοιπὸν νὰ καταλήξωμεν εἰς τὴν Συνισταμένην R , ἄνευ τῆς ἀνάγκης νὰ χαράξωμεν τὰς γραμμὰς OB καὶ OC , ἀρκεῖ νὰ τοποθετήσωμεν τὰς δεδομένας Δυνάμεις, τὴν μίαν κατόπιν τῆς ἄλλης, ἀρχόμενοι ἀπὸ τοῦ σημείου ἐφαρμογῆς O , διατηροῦντες ὀρθῶς τὴν φοράν ἐνεργείας τῶν Δυνάμεων τούτων (Σχ. 63) καὶ χαράσσοντες τελειωτικῶς τὴν Κλειδογραμμὴν $OD = R_3$.

Ἡ τεθλασμένη γραμμὴ $OABCD$ καλεῖται ὁ « Δυναμοσυρμός » ἢ τὸ « Δυναμοπολύγωνον ».

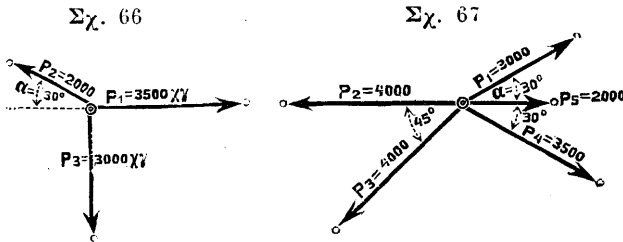
Χάριν εὐκρινεστέρως ἐπισκοπῆσεως συνιστάται νὰ κα-
ταστρώνωμεν τὴν σειρὰν τῶν Δυνάμεων εἰς ἰδιαιτέρον

Σχήμα (Σχ. 65), εἰς δὲ τὸ ἀρχικόν (Σχ. 64) νὰ χαράσσω-
μεν κατόπιν μόνον τὴν Συνισταμένην.

Ἐὰν εἰς τὸ Σχ. 65 ἀλλάξωμεν τὴν σειράν δύο Δυνά-



μεων, π. χ. τῶν P_1 καὶ P_2 , τότε καταλήγομεν εἰς διαφο-
ρετικόν μὲν Δυναμοσυρμὸν ΟΞΒC (ἀντὶ τοῦ ΟΑΒC),
ἀλλ' εἰς τὴν αὐτὴν Συνισταμένην ΟC.



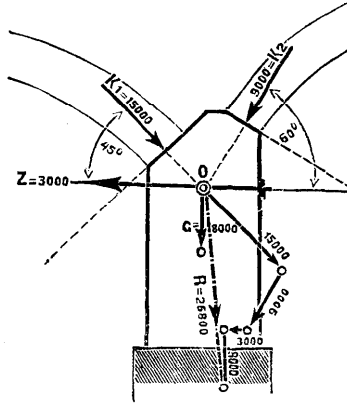
Ἡ σειρά λοιπὸν τῆς ἐν τῷ Δυναμοσυρμῷ παραθέσεως
τῶν Δυνάμεων εἶναι ἀδιάφορος.

Θέματα. Προσδιορίσωμεν τὴν Συνισταμένην τῶν δε-
δομένων ἐν τῷ Σχ. 66 Δυνάμεων.

Πράξωμεν τὸ αὐτὸ διὰ τὸ Σχ. 67.

Ἐπαναλάβωμεν τὰ αὐτὰ θέματα μὲ διάφορον σειρὰν παραθέσεως τῶν Δυνάμεων. Σχ. 68

Εἰς τὸ Σχ. 68 ἐνεργοῦσιν αἱ ἀθλητοπιέσεις δύο θόλων ἐπὶ λιθίνου βάθρου, ἡ ἐφελκύνουσα Δύναμις $\frac{1}{2}$ Ἐλκυστήρός τινος καὶ τὸ ἴδιον βάρος G . Καὶ αἱ τέσσαρες Δυνάμεις συναντῶνται εἰς τὸ σημεῖον O . Ἐν τῷ αὐτῷ Σχήματι διεξήχθη κατὰ τὰ ἀνωτέρω ἢ σύνθεσις τῶν Δυνάμεων τούτων καὶ εὐρέθη ἡ Συνισταμένη αὐτῶν



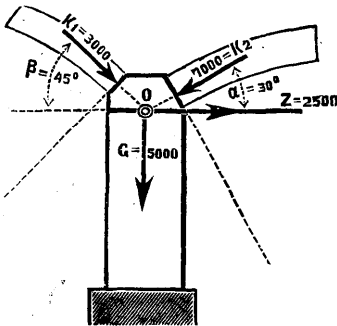
Κλίμαξ : $x = 1 \text{ εἰς } 10000 \text{ χγ.}$

$R = 26800 \text{ χγ.}$

Θέματα. Τοποθετήσωμεν τὰς Δυνάμεις τοῦ Σχ. 68 κατ' ἄλλην σειρὰν κατὰ τὴν σύνθεσιν τῶν Δυνάμεων τούτων, ἐκλέγοντες συνάμα κλίμακα διὰ τὰς Δυνάμεις μεγαλειτέραν.

Συνθέσωμεν τὰς ἐν τῷ

Σχ. 69



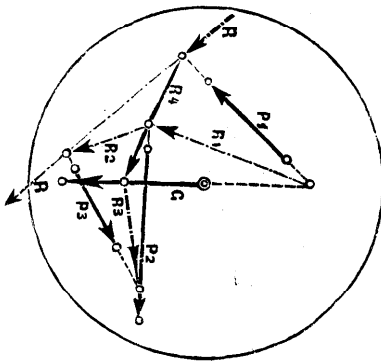
Σχ. 69 δεδομένας δυνάμεις.

§ 9. Δυνάμεις κατὰ διαφόρους διευθύνσεις.

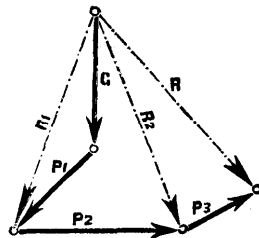
Εἰς τὸ Σχ. 70 ἐνεργοῦσιν ἐπὶ ἐνὸς Δίσκου τὸ ἴδιον βάρος τοῦ δίσκου G , ὅπερ προσβάλλει τὸ κέντρον βαρύτητος, καὶ πλείοτεραι Δυνάμεις P_1 , P_2 καὶ P_3 , αἵτινες δὲν

συναντώνται εἰς ἓν καὶ τὸ αὐτὸ σημεῖον. Ἐν πρώτοις συνθέτομεν τὰς P_1 καὶ G , ἀφοῦ τὰς μετατοπίσωμεν μέχρι τοῦ σημείου συναντήσεώς των, καὶ εὐρίσκομεν τὴν Συνισταμένην των R_1 . Τὴν R_1 συνθέτομεν μετὰ τῆς P_2 καὶ εὐρίσκομεν νέαν Συνισταμένην R_2 , ταύτην τέλος συνθέτομεν μετὰ τῆς P_3 καὶ καταλήγομεν εἰς τὴν R .

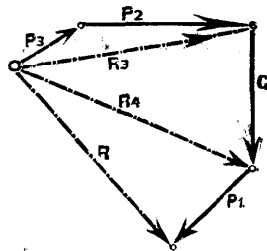
Σχ. 70



Σχ. 71



Σχ. 72



Εἶναι προτιμώτερον νὰ γίνηται ἡ σύνθεσις τῶν Δυνάμεων εἰς ἰδιαίτερον Σχέδιον (Σχ. 71) τῇ βοηθείᾳ τοῦ Δυναμοσυρμοῦ $GP_1P_2P_3$.

Ἐὰν ἀλλάζωμεν τὴν σειράν τῶν Δυνάμεων θὰ ἔχωμεν καὶ πάλιν τὴν αὐτὴν Συνισταμένην R (Σχ. 70 καὶ 72). Ἡ σειρά λοιπὸν κανονίζεται κατὰ βούλησιν.

§ 10. Παραδείγματα.

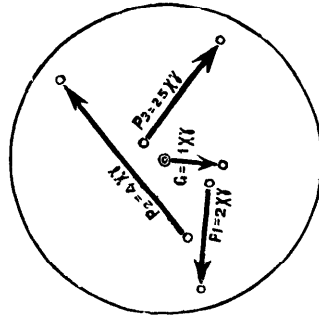
Συνθέσωμεν τὰς εἰς τὸ Σχ. 73 δεδομένας Δυνάμεις εἰς μίαν Συνισταμένην.

Πράξωμεν τὸ αὐτὸ μὲ διαφορετικὴν σειρὰν παραθέσεως τῶν Δυνάμεων ἐν τῷ Δυναμοπολυγώνῳ.

Εἰς τὸ Σχ. 74 ἐνεργοῦσι τέσσαρες ἐξωτερικαὶ Δυνάμεις P_1 , P_2 , P_3 καὶ P_4 καὶ τὸ ἴδιον βάρος G ἐπὶ ἐνὸς Μεσοδάθρου Γεφύρας.

Ἐν πρώτοις συνθέτομεν τὰς P_1 καὶ P_2 καὶ εὐρίσκομεν τὴν R_1 . Ἐπίσης συνθέτομεν τὰς P_3 καὶ P_4 καὶ εὐρίσκο-

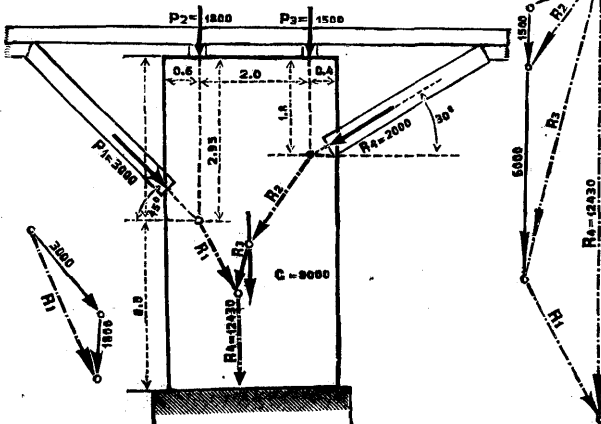
Σχ. 73



Σχ. 75

Κλίμαξ 1 ἐκ.=2000 χγ.

Σχ. 74



Σχ. 76

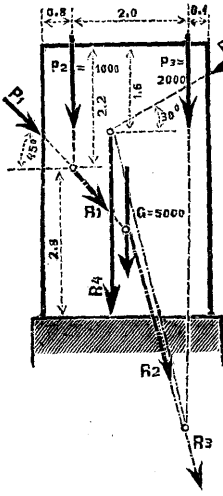
Κλίμαξ: 1 ἐκ.=2000 χγ.
Δυναμοσυρμός Σχ. 74.

Δυναμοσυρμός τοῦ Σχ. 74

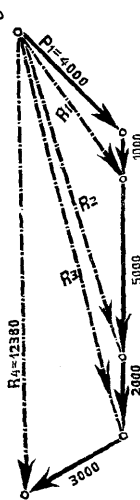
μεν τὴν R_2 . Μετὰ ταῦτα συνθέτομεν τὴν R_2 μετὰ τῆς G

καὶ εὐρίσκομεν τὴν R_3 , τέλος τὴν R_4 μετὰ τῆς R_1 καὶ καταλήγομεν εἰς τὴν R_4 . Κατὰ συνέπειαν τὸ Βάθρον ἐξασκεῖ ἐπὶ τῶν θεμελίων του μίαν πίεσιν $R_4=12430$ χγ.

Σχ. 77



Σχ. 78



Τὸ Σχ. 77 παρουσιάζει παρόμοιον Βάθρον. Ἡ σύνθεσις τῶν Δυνάμεων ἐγένετο ἐνταῦθα κατὰ διάφορον σειρὰν P_1, P_2, G, P_3 καὶ P_4 .

Θέματα. Συνθέσωμεν τὰς Δυνάμεις τοῦ Σχ. 74 κατὰ τὴν σειρὰν τοῦ Σχ. 77.

Συνθέσωμεν τὰς Δυνάμεις τοῦ Σχ. 77 κατὰ τὴν σειρὰν τοῦ Σχ. 74.

Τὸ Σχ. 79 παριστᾷ ἐν λίθινον Μεσόδαθρον, ἐπὶ τοῦ ὁποῖου ἐνεργοῦσιν αἱ Ἀθλητοπιέ-

Κλίμαξ: 1 ἐκ. = 2000 χγ.

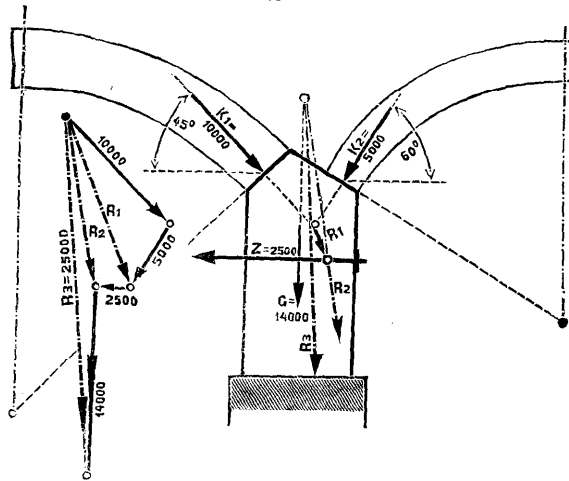
Δυναμοπολύγωνον Σχ. 77.

σεις δύο θόλων, τὸ ἴδιον βάρος καὶ ἡ ἐφελκύνουσα Δύναμις ἐνὸς Ἑλκυστήρος. Αἱ Δυνάμεις συνετέθησαν κατὰ σειρὰν καὶ εὐρέθησαν ἡ μία κατόπιν τῆς ἄλλης ὡς Συνιστάμεναι R_1, R_2 καὶ ἡ τελευταία $R_3=25800$ χγ. Τσαύτη λοιπὸν εἶναι ἡ Πίεσις τοῦ Βάθρου ἐπὶ τῶν θεμελίων.

Τὸ Σχ. 80 εἶναι ὅμοιον τῷ προηγουμένῳ διαφέρει δὲ κατὰ τοῦτο μόνον, ὅτι αἱ Δυνάμεις ἔχουσι διάφορον σειρὰν.

Θέματα. Συνθέσωμεν τὰς Δυνάμεις τῶν Σχημάτων 79 καὶ 80, ἐφαρμόζοντες διάφορον σειρὰν καὶ μεγαλειτέραν κλίμακα.

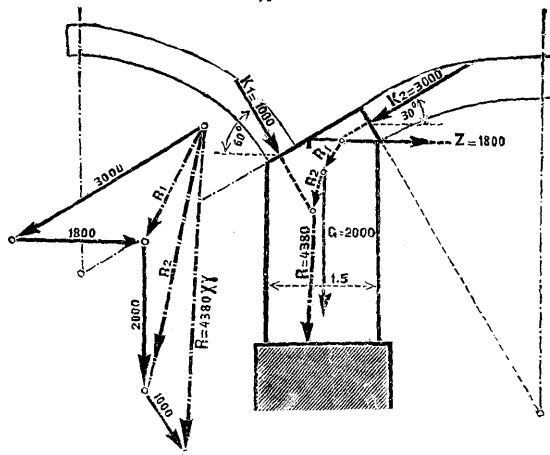
Σχ. 79



Δυναμοσυρμός

Κλίμαξ: 1 έκ. = 5000 χγ

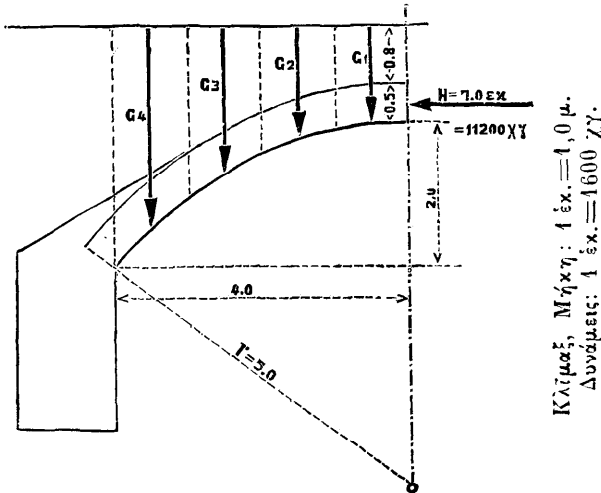
Σχ. 80



Κλίμαξ, Μέγεθος :
1 έκ. = 1 μ. Δυνάμεις:
1 έκ. = 1000 χγ.

Εἰς τὸ Σχ. 81 ἔχει σχεδιασθῇ τὸ ἡμισυ θόλου τινός, ὕπερ σὺν τῇ ἐπιχωματῶσει ἔχει διαιρεθῇ διὰ κατακορύφων γραμμῶν εἰς τέσσαρας λαορίδας· τούτων τὰ βάρη εἰσὶ δεδομένα διὰ τῶν μέσων ὑψῶν των. Εἰς τὴν κορυφὴν τοῦ θόλου ἐνεργεῖ ἡ ὀριζόντιος Πίεσις $H = 11200 \text{ χγ.}$

Σχ. 81



Συνθέσωμεν τὴν ὀριζόντιον Πίεσιν H κατὰ σειράν πρὸς τὰ Βάρη G_1, G_2, G_3 καὶ G_4 . Καταλήγομεν οὕτω εἰς τὴν λεγομένην «Καμπύλην τῶν Πιέσεων» τοῦ θόλου.

§ 11. Παράλληλοι Δυνάμεις.

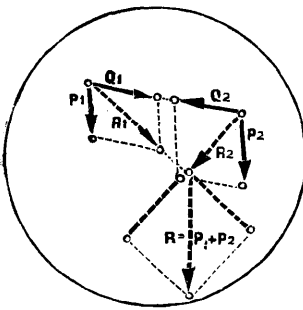
Παραλλήλους Δυνάμεις δὲν εἶναι δυνατόν νὰ συνθέσωμεν κατὰ τὰς μεθόδους, περὶ ὧν ἐπραγματεύθημεν μέχρι τοῦδε, διότι οὐδὲν σημεῖον συναντήσεως ἔχουσι.

Εἰς τὰ Σχ. 74, 77 καὶ 81 ἡδυνήθημεν νὰ συνθέσωμεν τὰς ἐκεῖ παρουσιαζομένας κατακορύφους Δυνάμεις, διότι

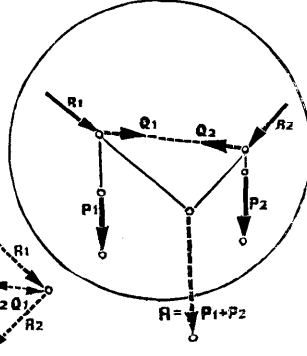
μεταξύ αὐτῶν εὐρίσκοντο καὶ ἄλλαι ἔχουσαι πλαγίας διευθύνσεις.

Ὅταν λοιπὸν πᾶσαι αἱ δεδομένα Δυνάμεις ἔχωσι τὴν αὐτὴν διεύθυνσιν, παρεισάγομεν καὶ ἄλλας τοιαύτας ἐχούσας διευθύνσεις διαφόρους. Αἱ τελευταῖαι ὅμως πρέπει νὰ ἐκλέγωνται τοιαῦται, ὥστε νὰ ἐξουδετερῶνται ἀμοι-

Σχ. 82



Σχ. 83



Δυναμοσυρμός Σχ. 83

θαίως, ἵνα μὴ ἀλλοιωσὶ τὴν ὁλικὴν ἐνέργειαν, ἥτις θὰ εἶναι τὸ ζητούμενον ἄθροισμα τῶν ἐνεργειῶν τῶν παραλλήλων μόνον Δυνάμεων.

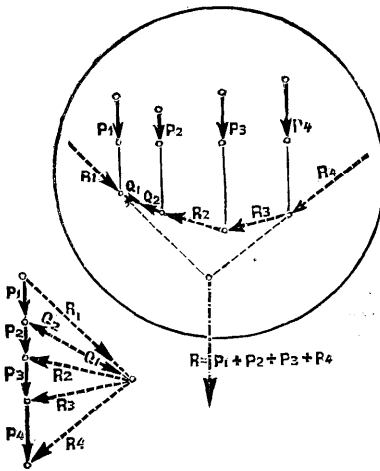
Εἰς τὰς δύο Δυνάμεις P_1 καὶ P_2 (Σχ. 82) προστίθενται δύο νέαι Q_1 καὶ Q_2 , αἵτινες εἰσιν ἴσαι ἀλλήλαις καὶ ἐνεργοῦσιν ἐπὶ τῆς αὐτῆς γραμμῆς ἀλλ' ἀντιθέτως. Συνεπῶς ἡ μία ἐξουδετερεῖ τὴν ἄλλην ἐν τῇ κοινῇ αὐτῶν ἐνεργείᾳ.

Ἡδὴ συνθέτομεν τὰς P_1 καὶ Q_1 εἰς μίαν Συνισταμένην R_1 καὶ τὰς P_2 καὶ Q_2 εἰς δευτέραν Συνισταμένην R_2 . Τὰς R_1 καὶ R_2 , αἵτινες συναντῶνται, συνθέτομεν εἰς νέαν Συνισταμένην R , ἥτις προφανῶς εἶναι ἡ ζητούμενη Συνισταμένη τῶν παραλλήλων Δυνάμεων P_1 καὶ P_2 .

Τὸ Σχέδιον ἀπλοποιεῖται ὅταν μεταχειρισθῶμεν τὸν Δυναμοσυρμόν, ὃν ἰδιαίτερώς σχεδιάζομεν παραπλευρώς (Σχ. 83).

Καὶ ὅταν ἔχωμεν Δυνάμεις πλειοτέρας τῶν δύο (Σχ. 84), συνθέτομεν τὴν P_1 μετὰ τῆς Q_1 εἰς τὴν Συνισταμένην R_1 ,

Σχ. 84



Δυναμοσυρμός
Σχ. 84.

τὴν P_2 καὶ Q_2 (ἴσην καὶ ἀντίθετον τῇ Q_1) εἰς τὴν Συνισταμένην R_2 , τὴν R_2 καὶ P_3 εἰς νέαν Συνισταμένην R_3 , τὴν R_3 καὶ P_4 εἰς νέαν Συνισταμένην R_4 , καὶ καταλήγομεν εἰς τὴν εὔρεσιν τεχνικῶς δύο Δυνάμεων πλαγίων καὶ τῆς R_4 ἀντικαθιστῶσάν τας δεδομένας παραλλήλους. Συνεπῶς ἡ Συνισταμένη R τῶν τελευταίων εἶναι καὶ ἡ ζητούμενη Συνισταμένη τῶν παραλλήλων Δυνάμεων P_1, P_2, P_3 καὶ P_4 .

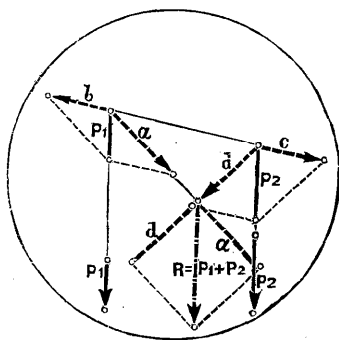
Παραλλήλους Δυνάμεις δυνάμεθα πρὸς τούτοις νὰ συνθέσωμεν καὶ κατὰ τὸν ἀκόλουθον τρόπον :

Ἀποσυνθέτομεν τὴν P_1 (Σχ. 85) εἰς δύο Δυνάμεις a καὶ b , κατόπιν τὴν P_2 εἰς δύο ἑτέρας Δυνάμεις c καὶ d , ἐκλέγοντες τὰς προσθέτους ταύτας Δυνάμεις οὕτως ὥστε νὰ ἔχωμεν $b = c$ καὶ νὰ εὐρίσκωνται αὗται ἐπὶ τῆς αὐτῆς γραμμῆς ἀντιθέτως ἐνεργοῦσαι. Ἐν τοιαύτῃ περιπτώσει αἱ Δυνάμεις b καὶ c ἐξουδετεροῦνται ἀμοιβαίως, αἱ δὲ ὑπολειπόμεναι a καὶ d συντίθενται κατὰ τὸν συνήθη

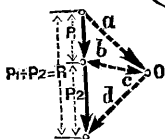
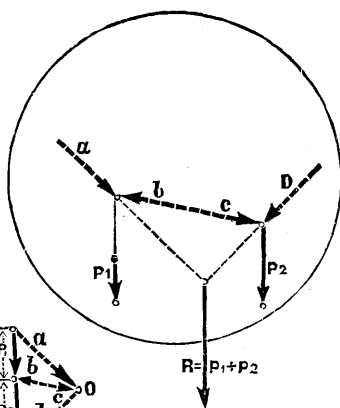
τρόπον εἰς μίαν Συνισταμένην R , ἥτις ἀντικαθιστᾷ τὴν ἐπὶ τοῦ δίσκου ἐνέργειαν τῶν δύο παραλλήλων Δυνάμεων P_1 καὶ P_2 .

Συγκρίνοντας τὰ Σχήματα 82 καὶ 85, παρατηροῦμεν ὅτι εἰς ἀμφοτέρα ἐχαράξαμεν τὰς αὐτὰς γραμμὰς, ἀλλὰ τινες τῶν γραμμῶν τούτων ἔχουσι διάφορον φοράν.

Σχ. 85



Σχ. 86



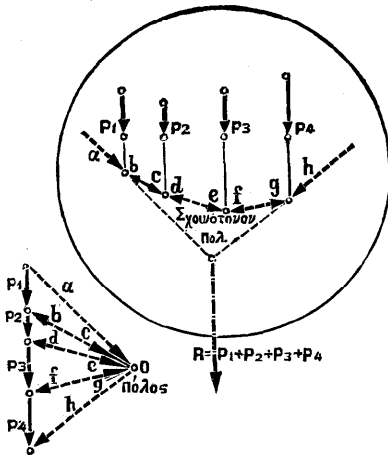
Δυναμοσυρμός Σχ. 86.

Δυνάμεθα πρὸς τούτοις νὰ σχεδιάσωμεν ἰδιαίτερον Δυναμοσυρμόν (Σχ. 86), ὅστις ἀνταποκρίνεται εἰς τὸ Σχ. 83.

Καθ' ὅμοιον τρόπον δυνάμεθα νὰ ἐργασθῶμεν καὶ ὅταν ἔχωμεν Δυνάμεις πλειοτέρας τῶν δύο. Ἀποσυνθέτομεν καὶ τὴν P_3 εἰς δύο Δυνάμεις e , f , οὕτως ὥστε ἡ e νὰ εὑρίσκηται πρὸς τὴν προηγουμένην d ἐν ἰσορροπία, προσέτι δὲ τὴν P_4 εἰς δύο Δυνάμεις g καὶ h , οὕτως ὥστε ἡ g νὰ εὑρίσκηται ἐν ἰσορροπία πρὸς τὴν f . Ἀπομένουσι ἐν τέλει αἱ δύο Δυνάμεις a καὶ h , αἵτινες ὁμοῦ δίδουσι τὴν Συνισταμένην $R = P_1 + P_2 + P_3 + P_4$.

Τὸ Σχ. 87 ἀνταποκρίνεται εἰς τὸ Σχ. 84 καὶ μόνον ἡ φορὰ γραμμῶν τινων εἶναι διάφορος.

Ἡ τεθλασμένη γραμμὴ $abedefgh$ καλεῖται «τὸ Σχοινοτόνον ἢ Σχοινοειδὲς Πολύγωνον», διότι σχοινίον ἐκ τοῦ ὁποῖου κρέμονται τὰ βάρη P_1, P_2, P_3 καὶ P_4 λαμβάνει τὸ Σχήμα τῆς ἐν λόγῳ τεθλασμένης γραμμῆς.



Δυναμοσυρμὸς
Σχ. 87.

Τὸ σημεῖον O ἐν τῷ σχετικῷ Δυναμοσυρμῷ καλεῖται ὁ «Πόλος», αἱ δὲ γραμμαὶ ab, bc, de, fg καὶ h αἱ «Πολικαὶ ἀκτῖνες».

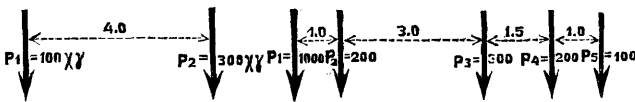
Θέματα : Συνθέσωμεν τὰς εἰς τὸ Σχ. 88

δεδομένας Δυνάμεις.

Πράξωμεν τὸ αὐτὸ διὰ τὸ Σχ. 89.

Εἰς τὸ Σχ. 90 ἐνεργοῦσιν ἐπὶ λιθίνου τινὸς Βάθρου

Σχ. 88

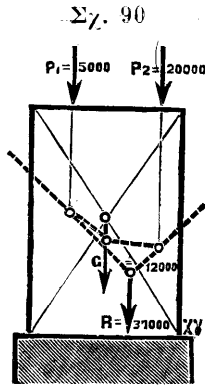


Σχ. 89

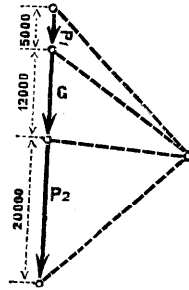
δύο Φορτία P_1 καὶ P_2 , καθὼς καὶ τὸ ἴδιον Βάρος G τοῦ Βάθρου.

Τῶν τριῶν τούτων Δυνάμεων εὐρέθῃ ἡ Συνισταμένη R τῇ βοήθειᾳ τοῦ Σχοινοτόνου πολυγώνου καὶ εἶναι

$R=37000$ χγ. ή θλίψις ήν άσκει τὸ Βάθρον ἐπὶ τῶν θεμελίων του.

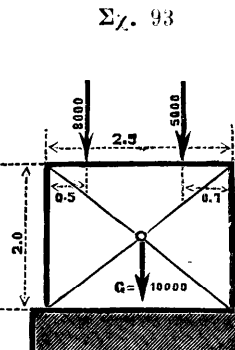
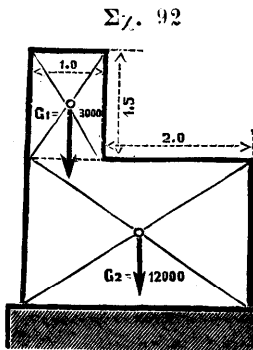


Σχ. 91



Δυναμοσυρμές Σχ. 90.

Θέματα : Προσδιορίσωμεν τήν Συνισταμένην τῶν εἰς τὸ Σχ. 92 δεδομένων Δυνάμεων.



Πράξωμεν τὸ αὐτὸ διὰ τὰς Δυνάμεις τοῦ Σχ. 93.



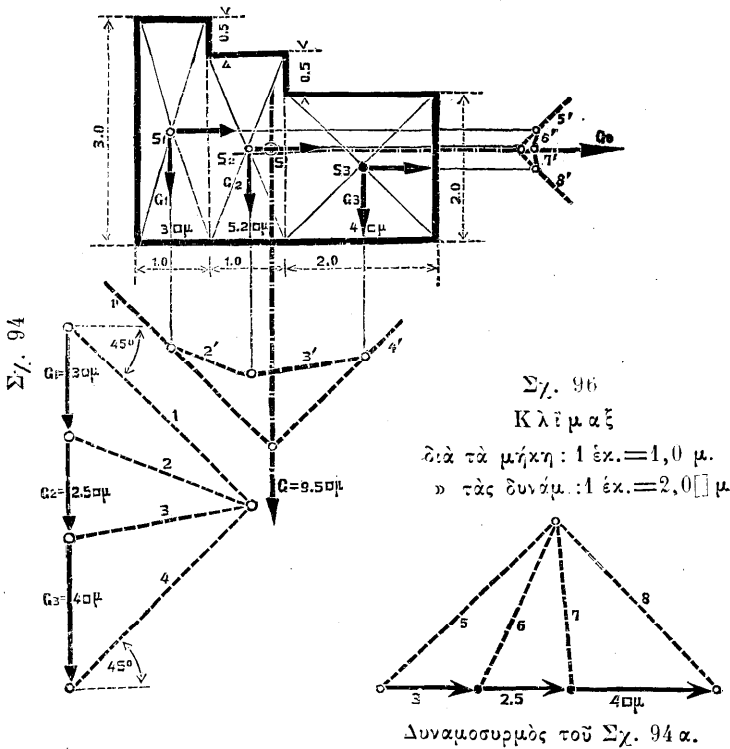
ΚΕΦΑΛΑΙΟΝ Γ'.

ΚΕΝΤΡΑ ΒΑΡΥΤΗΤΟΣ

§ 12. Γραμμαὶ καὶ Κέντρα βαρύτητος.

Ἡ Σύνθεσις παραλλήλων Δυνάμεων χρησιμεύει καὶ

Σχ. 94α



διὰ τὸν προσδιορισμὸν τὰν Γραμμὰν καὶ Κέντρων βαρύτητος.

Τὸ Κέντρον βαρύτητος κανονικοῦ τινος Σχήματος εὐρίσκεται εἰς τὸ μέσον. Ἀκανόνιστα δὲ Σχήματα (Σχ. 94) διαιροῦμεν εἰς κανονικὰ τοιαῦτα, τῶν ὁποίων εἰσὶ γνωστά τὰ κέντρα βαρύτητος (S_1 , S_2 καὶ S_3). Λαμβάνομεν τὰ βάρη τῶν τεμαχίων, τὰ ὅποια ἀνταποκρίνονται εἰς τὰς ἐπιφανείας τῶν ἰδίων τεμαχίων, ὡς Δυνάμεις (G_1 , G_2 καὶ G_3) ἐνεργοῦσας εἰς τὰ κέντρα βαρύτητος καὶ προσδιορίζομεν τὴν Συνισταμένην αὐτῶν:

$$(1 = 3 + 2, \quad 5 + 4 = 9, \quad 5 \text{ τετρ. μέτρα.})$$

Εἰς τὴν Συνισταμένην ταύτην εὐρίσκεται συγκεντρωμένον ὁλόκληρον τὸ Βάρος τοῦ Σώματος, διὸ καὶ καλεῖται Γραμμὴ βαρύτητος. Ἐὰν ἐξαρτήσωμεν τὸ Σῶμα ἐξ οἷουδὴποτε σημείου τῆς Γραμμῆς ταύτης, τὸ Σῶμα θὰ εὐρίσκηται ἐν ἰσορροπίᾳ.

Παρατήρησις. Κατὰ τὴν χάραξιν τῶν γραμμῶν ἐπὶ τοῦ Πίνακος σχεδιάσεων (Σχεδιοτραπέζης), διευκολύνονται αἱ πράξεις, ἐὰν ἐκλέξωμεν τὰς βοηθητικὰς Δυνάμεις οὕτως, ὥστε ἡ πρώτη καὶ τελευταία πλευρὰ τοῦ Δυναμοσυρμοῦ νὰ ἔχωσι κλίσιν 45^0 ἄνωθεν τοῦ ὀρίζοντος. Ἐπειδὴ ἡ τοῦ Πόλου θέσις εἶναι αὐθαίρετος, δυνάμεθα νὰ ἐκλέξωμεν αὐτὴν συμφώνως πρὸς τὸν ἄνωτέρω ὅρον.

Τὰ ἐπόμενα Σχήματα ἐσχεδιάσθησαν τηρηθέντος τοῦ ὅρου τούτου.

Ὅταν στρέψωμεν τὸ Σῶμα (Σχ. 95), δυνάμεθα νὰ προσδιορίσωμεν νέαν γραμμὴν βαρύτητος (G_0) ἀνταποκρινομένην εἰς τὴν νέαν θέσιν τοῦ Σώματος.

Ἀλλὰ τὴν G_0 δυνάμεθα προσέτι νὰ χαράζωμεν χωρὶς νὰ στρέψωμεν τὸ Σῶμα, ἀρκεῖ ν' ἀλλάζωμεν τὴν διεύθυνσιν τῶν Δυνάμεων (Σχ. 94 α).

Αἱ γραμμαὶ τοῦ Δυναμοπολυγώνου τοῦ Σχ. 96 εἰσὶ κά-

θετοι ἐπὶ τὰς γραμμὰς τοῦ Δυναμοπολυγώνου τοῦ Σχ. 94,
 συνεπῶς εἶναι περιττὸν νὰ σχεδιάσωμεν καὶ τὸ δεῦτερον
 Δυναμοπολύγωνον, ἀλλὰ δυνάμεθα νὰ χαράξωμεν ἀπ’
 εὐθείας τὸ δεῦτερον Σχοινότονον πολύγωνον, 5',6',7',8',
 ἄγοντες διὰ τοῦ τριγώνου τῶν σχεδιάσεων καθέτους ἐπὶ

τὰς πολικὰς ἀκτῖνας 1, 2, 3, 4 τοῦ
πρώτου Δυναμοπολυγώνου (Σχ. 96).

Τὸ σημεῖον συναντήσεως δύο Γραμμῶν βαρύτητος S εἶναι τὸ Κέντρον βαρύτητος. Ἐν τούτῳ δυνάμεθα νὰ φαντασθῶμεν συγκεντρωμένον ὁλόκληρον τὸ Βάρος τοῦ Σώματος.

Τὸ Κέντρον βαρύτητος δυνατόν νὰ εὐρίσκηται καὶ ἐκτὸς τοῦ Σώματος, ὡς συμβαίνει εἰς τὸ Σχ. 97, ὅπου πρόκειται περὶ γωνιακοῦ τινος ἐλάσματος.

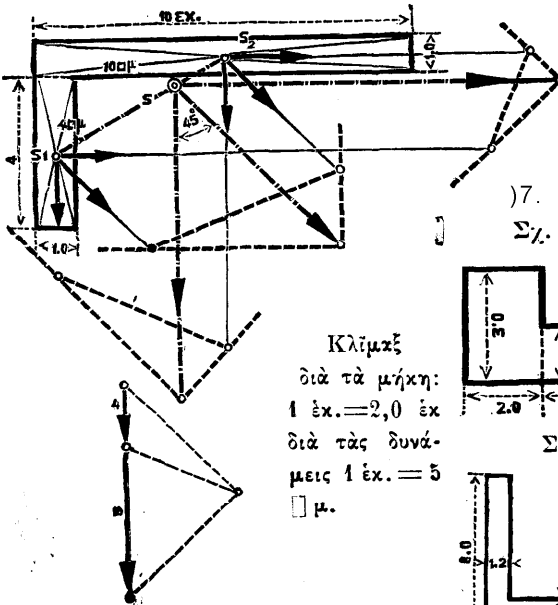
Εἰς τὸ Σχῆμα τοῦτο παραδεχόμεθα καὶ τρίτην διεύθυνσιν Δυνάμεων (ὕπὸ γωνίαν 45^0). Ἡ σχετικὴ

Γραμμή βαρύτητας διέρχεται διὰ τοῦ γνωστοῦ ἤδη Κέν-
τρου βαρύτητος S.

Ἐὰν υποθέσωμεν ἐνεργοῦντα τὰ Βάρι τῶν τμημάτων, εἰς ἃ διαιροῦμεν τὸ γωνιακὸν ἔλασμα τοῦ Σχ. 97, κατὰ τὴν γραμμὴν $S_1 S_2$, τὴν ἐνοῦσαν τὰ Κέντρα βαρύτητος τῶν ἰδίων τμημάτων, τότε αἱ Δυνάμεις συμπίπτουσιν ἐπ' αὐτῆς τῆς $S_1 S_2$ καὶ ἡ $S_1 S_2$ εἶναι ἐπίσης Γραμμὴ βαρύτητος, διέρχεται ἄρα διὰ τοῦ ζητουμένου Κέντρου βαρύτητος, καὶ συνεπῶς ἀρκεῖ ἡ τῇ βοηθείᾳ τοῦ Σχοινοτόνου Πολυγώνου χάραξις μιᾶς γραμμῆς βαρύτητος ὅπως, ἐν

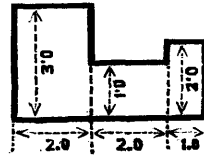
τῇ συναντήσει τῆς γραμμῆς ταύτης μετὰ τῆς γραμμῆς τῆς ἐνούσης τὰ κέντρα βαρύτητος τῶν δύο τμημάτων, καταλήξωμεν εἰς τὸ ζητούμενον Κέντρον S βαρύτητος ὁλοκλήρου τοῦ Σχήματος.)7. 97

Σχ. 97

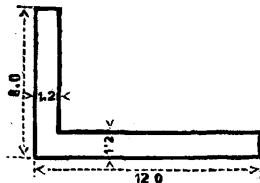


)7. 98

Σχ. 98



Σχ. 99



Κλίμαξ
διὰ τὰ μήκη:
1 ἐκ. = 2,0 ἐκ
διὰ τὰς δυνάμεις 1 ἐκ. = 5
μ.

Θέματα : Προσδιορίσωμεν τὰ Κέντρα βαρύτητος τῶν Σχ. 98 καὶ 99.

§ 13. Καταστάσεις ἰσορροπίας.

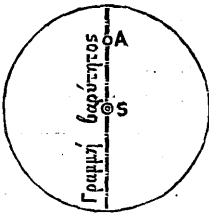
“Ὅταν ἐξαρτήσωμεν Σώμα τι ἐξ οἰουδήποτε σημείου, τότε τὸ Σώμα τείνει νὰ στραφῇ περὶ τὸ σημεῖον τοῦτο, ἄχρις οὗ τὸ Κέντρον βαρύτητος εὑρεθῇ κατακορύφως ὑπὸ τὸ σημεῖον ἐξαρτήσεως.

Ἡ διὰ τοῦ σημείου τούτου διερχομένη τότε κατακόρυφος εἶναι μία Γραμμὴ βαρύτητος (Σχ. 100).

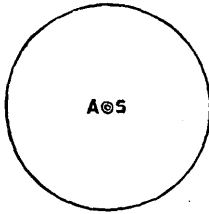
Τοῦτο δύναται νὰ χρησιμεύσῃ διὰ τὸν προσδιορισμὸν τοῦ Κέντρου βαρύτητος διαφόρων Σχημάτων. Σχεδιάζομεν τὰ Σχήματα ταῦτα ἐπὶ φύλλων χάρτου χονδροῦ (καρτονίου), ἀποκόπτομεν αὐτά, ἐξαρτῶμεν ἓκ τινος νήματος καὶ χαράσσωμεν τότε διὰ τινος χαρακτροῦ κατακόρυφον γραμμὴν διερχομένην διὰ τοῦ σημείου ἐξαρτήσεως.

Ἡ γραμμὴ αὕτη εἶναι Γραμμὴ Βαρύτητος. Κατόπιν ἐξαρτῶμεν τὸ αὐτὸ Σχῆμα ἐξ ἄλλου τινὸς σημείου καὶ προσδιορίζομεν κατὰ τὸν αὐτὸν τρόπον δευτέραν γραμμὴν βαρύτητος. Τὸ σημεῖον συναντήσεως τῶν δύο Γραμμῶν εἶναι τὸ ζητούμενον Κέντρον βαρύτητος. Διὰ νὰ βεβαιωθῶμεν ἐάν ὀρθῶς εὑρομεν τὸ Κέντρον βαρύτητος, ἐπαναλαμβάνομεν τὸ πείραμα προσδιορίζοντες καὶ τρίτην Γραμμὴν βαρύτητος, ἢ ὅποια πρέπει ἐπίσης νὰ διέρχεται διὰ τοῦ ὀρισθέντος Κέντρου.

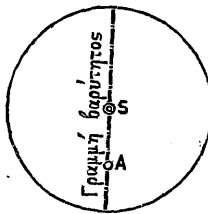
Σχ. 100



Σχ. 101



Σχ. 102



Ἡ κατάστασις Ἱσορροπίας ἐξηρητημένου τινὸς Σώματος κατὰ τὸ Σχ. 100 χαρακτηρίζεται ὡς «βεβαία» καὶ «εὐσταθής» διότι ἀναλαμβάνει ταύτην ἀφ' ἑαυτοῦ τὸ Σῶμα, ὅταν διαταραχθῇ ὑπὸ ἐξωτερικῆς τινος αἰτίας ἢ ἀκίνησις αὐτοῦ.

Ὅταν τὸ Σῶμα ὑποστηρίζηται ἐν αὐτῷ τῷ Κέντρῳ βα-

ρύτητος (Σχ. 101) εὐρίσκεται τότε ἐν ἰσορροπίᾳ εἰς πᾶσαν θέσιν, ὅπως καὶ ἂν διαταραχθῇ μένει ἀκίνητον εἰς πᾶσαν νέαν θέσιν. Ἡ κατάστασις τῆς ἰσορροπίας καλεῖται τότε «ἀόριστος» ἢ «ἀδιάφορος».

Ὅταν τέλος τὸ Κέντρον βαρύτητος εὐρίσκηται ἐπὶ τῆς αὐτῆς μὲν κατακορύφου ἀλλ' ὑψηλότερον τοῦ σημείου ὑποστηρίξεως (Σχ. 102), τότε καὶ πάλιν εὐρίσκεται τὸ σῶμα ἐν ἰσορροπίᾳ, ἀλλ' ἡ ἐλαχίστη ᾤθησις ἀρκεῖ ὅπως φέρῃ τοῦτο ἐκτὸς τῆς καταστάσεως ἰσορροπίας, ὅποτε συστρέφεται περὶ τὸ σημεῖον A ὑποστηρίξεως, ἄχρις οὗ τὸ Κέντρον βαρύτητος S εὐρεθῇ κατακορύφως ὑπὸ τὸ σημεῖον A (ὡς εἰς τὸ Σχ. 100). Ἐν τῇ ἀρχικῇ αὐτοῦ θέσει (Σχ. 102) εὐρίσκετο τὸ Σῶμα εἰς «ἀβεβαίαν» ἢ «ἀσταθῆ» κατὰστασιν ἰσορροπίας.

Ἐκαστον σῶμα ἔχει ἐν μόνον Κέντρον βαρύτητος. Δι' αὐτοῦ διέρχονται πᾶσαι αἱ Γραμμαὶ βαρύτητος, διὸ συναντῶνται ἅπασαι εἰς τὸ μοναδικὸν τοῦτο Σημεῖον. Οἰαδήποτε γραμμὴ διερχομένη διὰ τοῦ Κέντρου βαρύτητος εἶναι Γραμμὴ βαρύτητος.

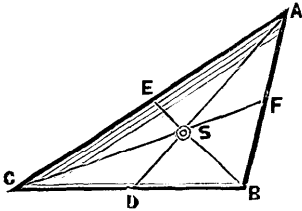
§ 14. Ἀπλᾶ σχήματα.

Ἐν τρίγωνον δυνάμεθα νὰ διαιρέσωμεν εἰς στενάς λωρίδας παραλλήλους τῇ μιᾷ τῶν πλευρῶν αὐτοῦ (AC εἰς Σχ. 103). Τὸ Κέντρον βαρύτητος ἐκάστης λωρίδος εὐρίσκεται εἰς τὸ μέσον τῆς λωρίδος ἐπὶ τῆς γραμμῆς BE ἣτις συνδέει τὸ σημεῖον B μετὰ τοῦ E , τοῦ εὐρισκομένου εἰς τὸ μέσον τῆς AC . Ἐπὶ τῆς BE εὐρίσκονται τὰ Κέντρα βαρύτητος πασῶν τῶν παραλλήλων τῇ AC λωρίδων. Ἡ γραμμὴ λοιπὸν BE εἶναι Γραμμὴ βαρύτητος.

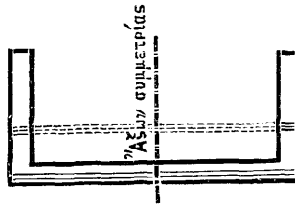
Διαιροῦντες τὸ αὐτὸ τρίγωνον εἰς λωρίδας παραλλήλους ἐτέρᾳ τινὶ πλευρᾷ, τῇ BC , εὐρίσκομεν δευτέραν

Γραμμὴν βαρύτητος, τὴν AD . Τὸ σημεῖον συναντήσεως (S) τῶν δύο Γραμμῶν βαρύτητος εἶναι τὸ ζητούμενον Κέντρον βαρύτητος τοῦ τριγώνου. Διὰ τοῦ αὐτοῦ σημείου διέρχεται καὶ ἡ τρίτη Γραμμὴ βαρύτητος CF . Τὸ Κέντρον βαρύτητος διαιρεῖ τὰς τρεῖς μεσαίας γραμμὰς ἢ Γραμμὰς

Σχ. 103



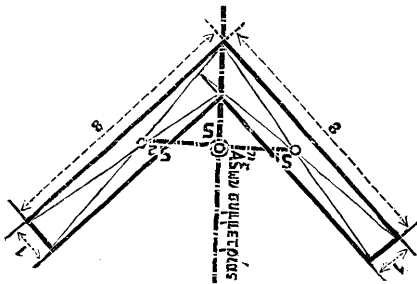
Σχ. 104



βαρύτητος κατὰ τὴν ἀναλογίαν $1 : 2$, ὡς ἀποδεικνύεται ἐν τῇ Γεωμετρίᾳ.

Εἰς συμμετρικόν τι Σχῆμα (Σχ. 104), ὁ ἄξων συμμε-

Σχ. 105



τρίας εἶναι ἤδη Γραμμὴ βαρύτητος. Διότι, δυνάμεθα νὰ διαιρέσωμεν τὸ Σχῆμα εἰς στενὰς λωρίδας, τῶν ὁποίων πάντα τὰ Κέντρα βαρύτητος εὐρίσκονται ἐπὶ τοῦ ἄξονος συμμετρίας.

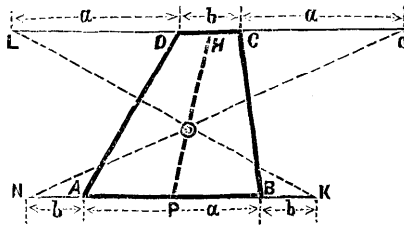
Τὸ Σχῆμα 105 παριστᾷ τὴν τομὴν ἰσοσκελοῦς γωνιακοῦ ἐλάσματος. Ὁ ἄξων συμμετρίας εἶναι Γραμμὴ βαρύτητος. Ἡ ἐπιφάνεια διηρέθη εἰς δύο ὀρθογώνια, τῶν ὁποίων τὰ Κέντρα βαρύτητος ἠνώθησαν διὰ τῆς γραμμῆς $S_1 S_2$, ἡ γραμμὴ δὲ αὕτη προφανῶς εἶναι δευτέρα Γραμμὴ βαρύτητος, ὥστε τὸ

σημείον συναντήσεως τῆς τελευταίας μετὰ τοῦ ἄξονος συμμετρίας εἶναι τὸ ζητούμενον Κέντρον βαρύτητος S τοῦ ὅλου Σχήματος.

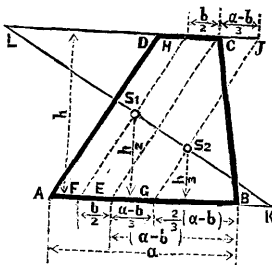
§ 15. Τραπεζίον.

Εἰς ἓν τραπέζιον (Σχ. 106) ἡ μέση γραμμὴ ΠΡ εἶναι Γραμμὴ βαρύτητος. Δευτέρα Γραμμὴ βαρύτητος εἶναι ἡ ΝΟ, ἣτις εὐρίσκεται ἐὰν λάβωμεν ἐπὶ τῆς πρὸς τὰ δεξιὰ ἐπεκτάσεως τῆς DC, τὴν $a=AB$, καὶ ἐπὶ τῆς πρὸς τ' ἀριστερὰ ἐπεκτάσεως τῆς AB, τὴν $b=DC$, καὶ ἐνώσωμεν τὰ ἄκρα Ο καὶ Ν. Ἐπίσης ἡ LK εἶναι ἐτέρα Γραμμὴ βαρύτητος, ἣν εὐρίσκομεν κατ' ἀνάλογον τρόπον.

Σχ. 106



Σχ. 107



Ἡ ἀπόδειξις διεξάγεται ὡς ἐξῆς : Διαιροῦμεν τὸ τραπέζιον εἰς τὸ παραλληλόγραμμον AECD καὶ τὸ τρίγωνον BEC (Σχ. 107). Ἡ γραμμὴ ἡ ἐνοῦσα τὰ Κέντρα βαρύτητος S_1 , S_2 τῶν τμημάτων εἰς ἃ διηρέσαμεν τὸ ὅλον Σχῆμα εἶναι Γραμμὴ βαρύτητος τοῦ τελευταίου. Ἐὰν ἤδη ἐπεκτείνωμεν τὴν γραμμὴν $S_1 S_2$ μέχρι τῆς Βάσεως (σημεῖον K) καὶ φέρωμεν διὰ τῶν S_1 καὶ S_2 παραλλήλους τῇ AD ($S_1 F$ καὶ $S_2 G$) θέλομεν ἔχει :

$$S_1 F : S_2 G = \frac{h}{2} : \frac{h}{3} = 3 : 2.$$

Ἐπίσης ἔχομεν :

$$S_1 F : S_2 G = KF : KG = 3 : 2$$

Ἄρα $3 KG = 2 KF$

καὶ $KG = \frac{2}{3} KF$

Ἐπειδὴ δὲ εἶναι ἐκ κατασκευῆς τὸ

$$KG = \frac{2}{3} KF \text{ καὶ } KG + GF = KF$$

Ἔχομεν καὶ

$$GF = \frac{1}{3} KF \text{ καὶ } KG = 2 GF$$

Καλοῦντες τὸ μῆκος $AB = \alpha$ καὶ τὸ $CD = b$, ἔχομεν :

$$EF = \frac{b}{2}, EG = \frac{\alpha - b}{3} \text{ καὶ } BG = \frac{2}{3} (\alpha - b)$$

$$FG = \frac{b}{2} + \frac{\alpha - b}{3}$$

$$KG = 2 FG = 2 \left(\frac{b}{2} + \frac{\alpha - b}{3} \right) = b + \frac{2}{3} (\alpha - b)$$

$$\text{καὶ } KB = KG - BG = b.$$

Δυνάμεθα λοιπὸν νὰ προσδιορίσωμεν τὸ σημεῖον K προεκτείνοντες τὴν πλευρὰν AB δεξιόθεν κατὰ τὸ μῆκος b .

Ἀφ' ἑτέρου ἐπεκτείνοντες τὰς γραμμὰς $S_1 F$, $S_2 G$, καὶ $S_2 S_1$ πρὸς τὰ ἄνω μέχρι συναντήσεως τῆς πλευρᾶς CD ἢ τῆς ἐπεκτάσεως τῆς CD , θέλομεν ἔχει :

$$S_2 J : S_1 H = \frac{2}{3} h : \frac{h}{2} = 4 : 3$$

Ἐπίσης ἔχομεν :

$$S_2 J : S_1 H = LJ : LH = 4 : 3$$

$$LH = 3 HJ$$

Ἄλλ' εἶναι: $HJ = FG = \frac{b}{2} + \frac{\alpha - b}{3}$

Συνεπῶς εὐρίσκομεν :

$$LH = 3 \quad HJ = \frac{3}{2} \quad b + a - b = a + \frac{b}{2}$$

$$\text{Καὶ} \quad DL = LH - DH = LH - \frac{b}{2} = a.$$

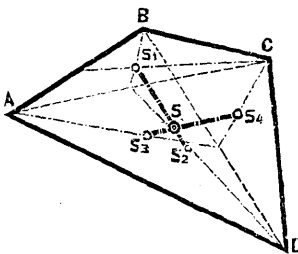
Δυνάμεθα λοιπὸν νὰ προσδιορίσωμεν τὸ σημεῖον L ἐπεκτείνοντες πρὸς τ' ἀριστερὰ τὴν πλευρὰν CD κατὰ τὸ μῆκος $DL = a$.

Διὰ τὴν ἄλλην Γραμμὴν βαρύτητος NO διεξάγεται ἡ ἀπόδειξις κατὰ τὸν αὐτὸν τρόπον, ἀφοῦ χαράζωμεν διὰ τοῦ σημείου D παράλληλον τῇ BC, ἥτις διαιρεῖ τὸ Τραπεζίον εἰς ἓν παραλληλόγραμμον καὶ ἓν τρίγωνον.

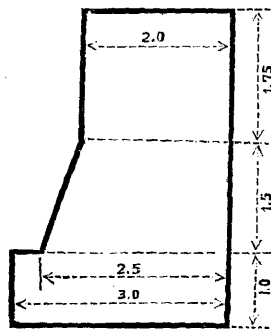
§ 16. Σχήματα ἀκανόνιστα.

Ἐν ἀκανόνιστον τετράπλευρον ABCD (Σχ. 108) διαιροῦμεν εἰς δύο τρίγωνα ABC καὶ ADC, ὅποτε ἔχο-

Σχ. 108



Σχ. 109



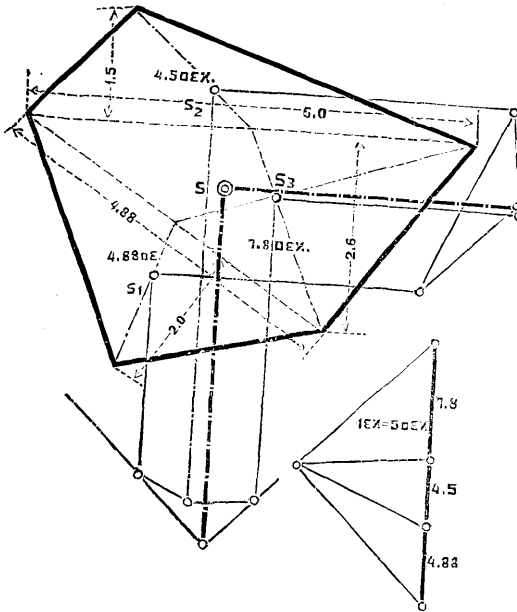
μεν μίαν Γραμμὴν βαρύτητος $S_1 S_2$ τοῦ τραπεζίου ἐνοῦν-
τες τὰ κέντρα S_1 καὶ S_2 τῶν δύο τριγώνων. Ἀπο-
κτῶμεν δὲ δευτέραν Γραμμὴν βαρύτητος, ἐὰν ἐνώσωμεν

τὰ Κέντρα βαρύτητος τῶν τριγώνων ABD καὶ CBD, τὰ S_3 καὶ S_4 .

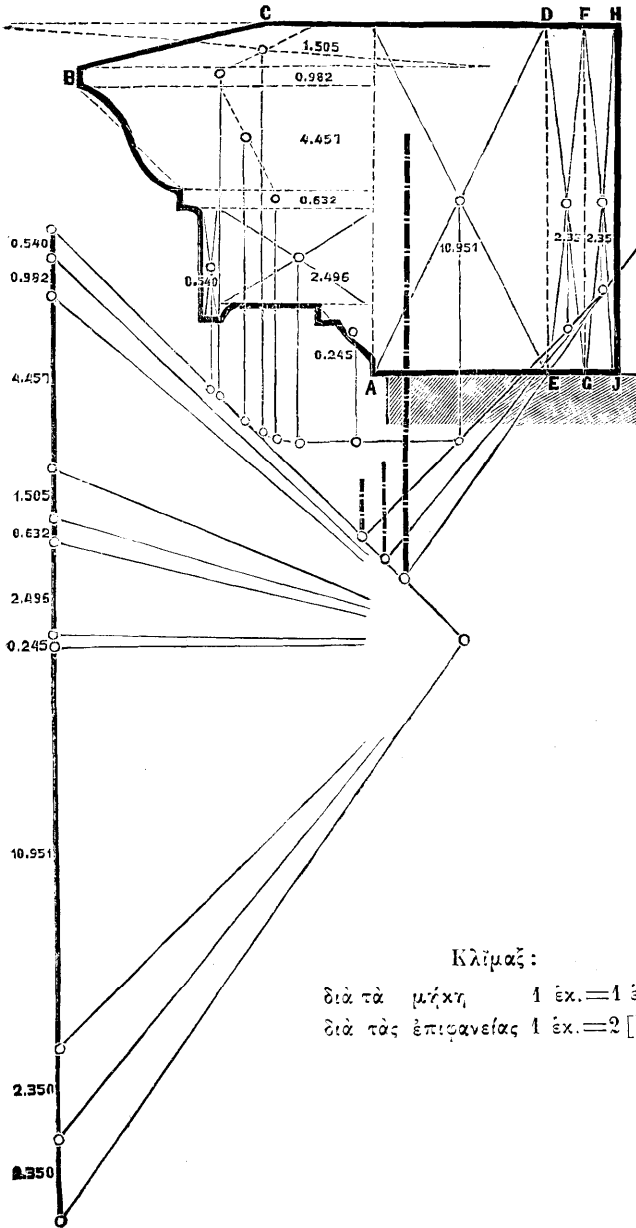
Τὸ σημεῖον συναντήσεως τῶν δύο Γραμμῶν βαρύτητος εἶναι τὸ ζητούμενον Κέντρον βαρύτητος τοῦ τετραπλεύρου ABCD.

Θέμα. Προσδιορίσωμεν τὸ Κέντρον βαρύτητος τῆς ἐν τῇ Σχ. 109 διατομῆς τοῖχου τινός.

Σχ. 110



Εἰς τὸ Σχ. 110 ἐνδείκνυται ὁ τρόπος τῆς ἐξευρέσεως τοῦ Κέντρου βαρύτητος ἀκανονίστου τινὸς πενταγώνου. Διηρέθῃ τοῦτο εἰς τρία τρίγωνα. Αἱ ἐπιφάνειαι τῶν τριγώνων τούτων συνεκεντρώθησαν ὡς βάρη εἰς τὰ Κέντρα βαρύτητος καὶ προσδιορίσθησαν δύο Γραμμαὶ βαρύτητος



κατὰ διαφόρους διευθύνσεις. Προφανῶς ἡ συνάντησις τῶν δύο Γραμμῶν βαρύτητος δίδει τὸ ζητούμενον Κέντρον βαρύτητος.

Παρατήρησις. Πολλάκις δὲν ἐπιζητοῦμεν μεγάλην ἀκρίβειαν περὶ τὸν καθορισμὸν τοῦ Κέντρου βαρύτητος (ὡς ἐπὶ παραδείγματι προκειμένου περὶ δόλων). Ἐν τοιαύτῃ περιπτώσει λαμβάνομεν τὰ Κέντρα βαρύτητος τῶν τριῶν τριγώνων ὡς γωνίας ἑνὸς νέου τριγώνου, οὗτινος προσδιορίζομεν τὸ Κέντρον βαρύτητος καὶ τοῦτο παραδεχόμεθα ὡς τὸ ζητούμενον Κέντρον βαρύτητος τοῦ δεδομένου πενταγώνου. Ὁ τρόπος οὗτος τότε δίδει ἡμῖν ἀκριβὲς ἀποτέλεσμα, ὅταν καὶ τὰ τρία τρίγωνα εἶναι τῆς αὐτῆς ἐπιφανείας· εἰς πᾶσαν ἄλλην περίπτωσιν τὸ ἀποτέλεσμα εἶναι μόνον κατὰ προσέγγισιν ἀκριβές, τοῦθ' ὅπερ ὅμως ἀρκεῖ διὰ τὰς περισσοτέρας περιπτώσεις.

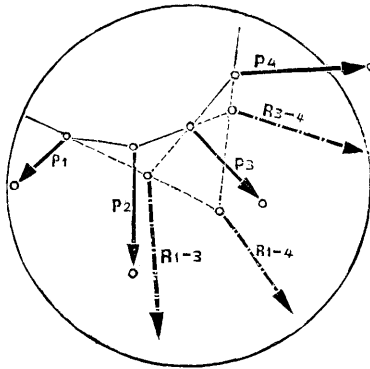
Ὅταν πρόκηται περὶ τοῦ Κέντρου βαρύτητος οἰουδήποτε ἀκανονίστου Σχήματος, ὡς εἶναι ἡ ἐν τῷ Σχ. 111 παριστανομένη διατομὴ μιᾶς Κορωνίδος, φροντίζομεν νὰ διαιρῶμεν τὸ Σχῆμα τοῦτο καταλλήλως, ἀντικαθιστῶντες καμπύλας περιοχὰς δι' εὐθυγράμμων τῆς αὐτῆς ὅσον τὸ δυνατόν ἀξίας. Μετὰ τοῦτο ἐργαζόμεθα κατὰ τοὺς αὐτοὺς ὡς ἄνω κανόνας.

Ἡ διὰ τοῦ Κέντρου βαρύτητος τοῦ πενταγώνου ABC DE (Σχ. 111) διερχομένη κατακόρυφος πίπτει ἐκτὸς τῆς ἐπιφανείας ὑποστηρίξεως τῆς Κορωνίδος.

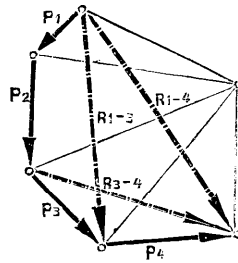
Τούτου ἕνεκα προσετέθη τὸ ὀρθογώνιον DEFG· ἐπειδὴ δὲ καὶ τοῦτο δὲν ἐπῆρκεσε, προσετέθη καὶ δεύτερον ὀρθογώνιον FGHI, δι' οὗ κατωρθώθη τέλος νὰ μετατοπισθῇ τὸ Κέντρον βαρύτητος πρὸς τὸ ἐσωτερικὸν ἐπὶ τοσοῦτον ὥστε νὰ εὕρισκται ἄνωθεν τῆς ἐπιφανείας ὑποστηρίξεως, ὡς ἡ εὐστάθεια τῆς Κορωνίδος ἀπαιτεῖ.

κόλως τὴν μερικὴν Συνισταμένην τινῶν ἐκ τῶν τεσσάρων Δυνάμεων λ. χ. τῶν P_1 , P_2 καὶ P_3 , ἢ τῶν P_3 καὶ P_4 · δὲν ἔχομεν ἢ νὰ ἐπεκτείνωμεν μέχρι συναντήσεως τὰς πλευρὰς ἐκεῖνας τοῦ γενικοῦ Σχοινοτενοῦς Πολυγώνου,

Σχ. 114



Σχ. 115



Δυναμοσυρμός
τοῦ Σχ. 114.

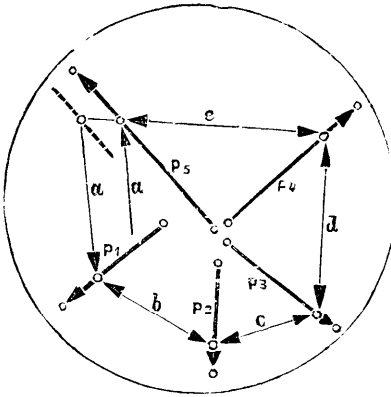
αἵτινες περικλείουσι τὰς Δυνάμεις, ὧν ζητεῖται ἡ Συνισταμένη.

Διὰ τοῦ σημείου τούτου διέρχεται ἡ ζητούμενη Συνισταμένη, τῆς ὁποίας τὸ μέγεθος καὶ ἡ διεύθυνσις λαμβάνονται ἐκ τοῦ Δυναμοσυρμοῦ (R_{1-3} καὶ R_{3-4} τοῦ Σχ. 115).

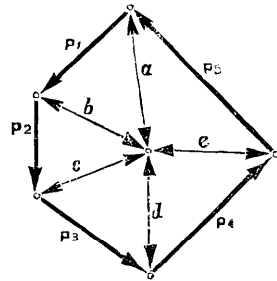
Δυνατὸν νὰ συμβῇ ὥστε τὸ τελευταῖον σημεῖον τοῦ Δυναμοπολυγώνου νὰ συμπίπτῃ μετὰ τοῦ ἀρχικοῦ (Σχ. 117). Τότε ἡ Συνισταμένη πασῶν τῶν δεδομένων Δυνάμεων εἶναι $= 0$. Ἐνταυτῷ δὲν εἶναι ἀπαραίτητον νὰ κλείῃ καὶ τὸ Σχοινοτενὲς Πολύγωνον. Εἰς τὸ Σχ. 116 ἀπομένουσι δύο ἴσαι, παράλληλοι ἀλλ' ἀντίθετοι Δυνάμεις α , αἱ ὁποῖαι ὅμως δὲν εὐρίσκονται ἐπὶ τῆς αὐτῆς γραμμῆς καὶ συνεπῶς δὲν ἐξουδετεροῦνται ἀμοιβαίως. Ἐχουσι

τοῦναντίον τὴν τάσιν νὰ περιστρέψωσι τὸν Δίσκον πρὸς τ' ἄριστερά.

Σχ. 116



Σχ. 117

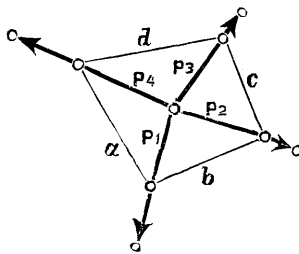


Δυναμοσυσμὸς τοῦ Σχ. 116.

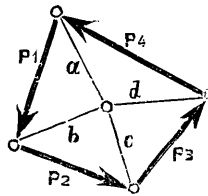
Δύο τοιαῦται Δυνάμεις οὐδέποτε ἀντικαθίστανται διὰ μιᾶς. Καλοῦνται «Ζεῦγος Δυνάμεων» ἢ «Ἀντιζεύγος».

Ἡ Συνισταμένη τῶν πέντε δεδομένων Δυνάμεων P_1, P_2, P_3, P_4 καὶ P_5 εἶναι μὲν ἴση τῇ μηδενί, χωρὶς ἐν

Σχ. 118



Σχ. 119



Δυναμοσυσμὸς τοῦ Σχ. 118.

τούτοις αἱ Δυνάμεις αἴται νὰ εὐρίσκωνται ἐν ἰσορροπίᾳ (ὡς ἐκ τῆς θέσεώς των), ἀλλ' ἀσκοῦσιν ἐπὶ τοῦ Δίσκου

μίαν ἐνέργειαν στροφῆς, τῆς ὁποίας τὸ μέγεθος ὀρίζεται διὰ τοῦ Ἀντιζεύγους α. α. Θὰ εἶχομεν πραγματικὴν ἰσορροπίαν ἐάν λ. χ. ἡ Δύναμις P_3 (Σχ. 116) εὑρίσκετο εἰς τὴν ἐν τῷ Σχ. ὑποδεικνυομένην διὰ ἐστιγμένης γραμμῆς παράλληλον τῇ ἀρχικῇ θέσει. Τότε αἱ δύο Δυνάμεις α, α θὰ συνεταυτίζοντο ἐπὶ τῆς αὐτῆς γραμμῆς καὶ ἡ μία θὰ ἐξουδετέρου τὴν ἄλλην.

Ὅταν τὸ Δυναμοπολύγωνον τῶν Δυνάμεων, αἵτινες ἐνεργοῦσιν ἅπασαι ἐφ' ἐνὸς σημείου, κλείῃ (Σχ. 118 καὶ 119), τότε αἱ Δυνάμεις αὗται εὑρίσκονται ἐν ἰσορροπίᾳ. Ὑπὸ τοιοῦτους ὅρους κλείει πάντοτε καὶ τὸ σχετικὸν Σχοινοτενές Πολύγωνον (α, b, c, d Σχ. 118).

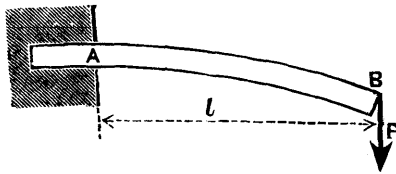
ΚΕΦΑΛΑΙΟΝ Δ'

ΡΟΠΑΙ ΚΑΙ ΕΔΡΟΠΙΕΣΕΙΣ

§ 18. Ροπαὶ κάμψεως καὶ Ροπαὶ περιστροφῆς.

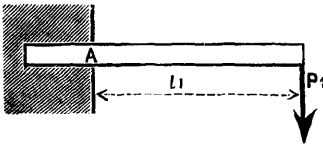
Τὸ Σχ. 120 δεικνύει Ράβδον ἢ Δοκὸν AB , ἣτις εἶναι στερεῶς πελακτωμένη ἐντὸς τοίχου καὶ ὑποφέρει εἰς τὸ ἐλεύθερον ἄκρον τὸ βάρος P . Ἡ Δοκὸς κάμπτεται ὑπὸ τὸ βάρος τοῦτο καὶ κινδυνεύει νὰ θραυσθῇ παρὰ τὸ σημεῖον τῆς πακτώσεως (παρὰ τὸ A), ἐὰν αὐξήσῃ τὸ βάρος P .

Σχ. 120



Ἐὰν τὸ ἐλεύθερον μῆκος τῆς Δοκοῦ εἶναι μικρότερον (Σχ. 121), δύναται τότε ἡ Δοκὸς (διατηροῦσα τὸ αὐτὸ πάχος καὶ πλάτος) νὰ ὑποφέρῃ μεγαλειότερον βάρος P_1 .

Σχ. 121



Ἡ προσπάθεια τοῦ Φορτίου νὰ κάμψῃ ἢ καὶ νὰ θραύσῃ τὴν Δοκὸν εἰς τὸ σημεῖον A δὲν ἐξαρτᾶται μόνον ἐκ τοῦ μεγέθους τοῦ Φορτίου, ἀλλ' ἀκόμη καὶ ἐκ τοῦ ἐλευθέρου τῆς Δοκοῦ μήκους. Εἶναι ἀνάλογος τοῦ γινομένου τοῦ βάρους ἐπὶ τὸ μήκος ($P \cdot l$ εἰς τὸ Σχ. 120 ἢ $P_1 \cdot l_1$ εἰς τὸ Σχ. 121).

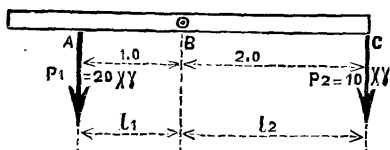
Τοῦτο δύναται ν' ἀποδειχθῇ δι' ἑνὸς πειράματος.

Λαμβάνομεν μίαν ράβδον ἢ ὁποῖα ὑποστηρίζεται εἰς τὸ μέσον οὕτως ὥστε νὰ δύναται νὰ περιστρέφεται περι

τὸ σημεῖον ὑποστηρίξεως (Σχ. 122) καὶ τὴν φορτῶνομεν καὶ ἀπὸ τὰ δύο σκέλη, οὕτως ὥστε νὰ ὑποχρεωθῇ ν' ἀν-
θίσταται ταυτοχρόνως καὶ εἰς τὰς δύο περιστροφικὰς Δυ-
νάμεις, τὴν πρὸς τὰ δεξιὰ, ὡς καὶ τὴν πρὸς τ' ἀριστερά.

Παρατηροῦμεν τότε ὅτι ἐν Φορτίον $P_2 = 10$ χγ. ἐνε-
ργοῦν εἰς τὸ σημεῖον C κρατεῖ τὴν ἰσορροπίαν εἰς τὸ Φορ-
τίον $P_1 = 20$ χγ; ὅπερ ἐνεργεῖ εἰς τὸ σημεῖον A. Ἡ Ῥά-
βδος τείνει νὰ στραφῇ ~~ἀριστερά~~^{δεξιὰ} μετὰ τὴν αὐτὴν ἔντασιν,
μολονότι ἐπιβαρύνεται πρὸς τὸ μέρος ἐκεῖνο μετὰ μικρότε-
ρον Φορτίον P_2 , διότι

Σχ. 122



τοῦτο ἐνεργεῖ μετὰ με-
γαλύτερον μοχλοβρα-
χίονα.

$$\begin{aligned} \text{Εἶναι: } 20 \chi\gamma \times 1 \mu. &= \\ 20 \chi\gamma. \mu. &= 10 \chi\gamma. \times 2 \mu. \end{aligned}$$

Ἐν γένει ἔχομεν ἰσορροπίαν δι' οἱαδήποτε Φορτία καὶ
μοχλοβραχίονας, ὅταν ὑφίσταται ἡ σχέσις $P_1 \cdot l_1 = P_2 \cdot l_2$.
Ἡ σχέσις αὕτη εἶναι γνωστὴ ἐκ τῆς Φυσικῆς ὡς «Νόμος
τοῦ Μοχλοῦ».

Τὸ γινόμενον $P \cdot l$ καλεῖται «Ῥοπή περιστροφῆς» ἢ
«Στατική Ῥοπή» τῆς Δυνάμεως P περὶ τὸ ὑπ' ὄψει ση-
μεῖον (κέντρον στροφῆς).

Ὅταν τὸ Φορτίον πιέξῃ τὴν Δοκόν, τείνον νὰ κάμψῃ
αὐτήν, ὡς τὰ Σχ. 120, 121 καὶ 122 δεικνύουσι, τότε τὸ
γινόμενον $P \cdot l$ καλεῖται προσέτι καὶ «Ῥοπή κάμψεως».
Ἡ Ῥοπή αὕτη ἔχει μεγάλην σημασίαν διότι συμφώνως
πρὸς τὸ μέγεθος αὐτῆς κανονίζεται τὸ πάχος τῆς Δοκοῦ.

Τὴν ἐξίσωσιν $P_1 \cdot l_1 = P_2 \cdot l_2$ δυνάμεθα νὰ γράψωμεν
καὶ οὕτω :

$$P_1 \cdot l_1 - P_2 \cdot l_2 = 0$$

Ἡ ὁποία δηλοῖ ὅτι ἐάν χαρακτηρίσωμεν τὴν πρὸς

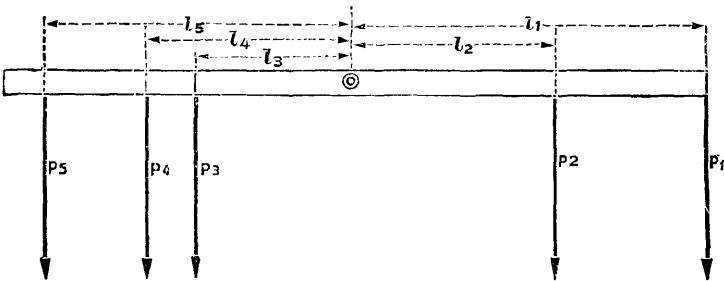
τ' ἄριστερά Ῥοπὴν τοῦ Φορτίου P_1 θετικὴν καὶ τὴν ἀντιθέτως πρὸς τὰ δεξιὰ ἐνεργοῦσαν τοῦ Φορτίου P_2 ὡς ἀρνητικὴν, πρέπει, διὰ νὰ ἔχωμεν ἰσορροπίαν, νὰ εἶναι τὸ (ἀλγεβρικὸν) ἄθροισμα τῶν Ῥοπῶν $= 0$.

Τίγν ἐξίσωσιν $P_1 \cdot l_1 - P_2 \cdot l_2 = 0$ δυνάμεθα ἀκόμη νὰ γράψωμεν :

$$P_2 \cdot l_2 - P_1 \cdot l_1 = 0,$$

ἥτις δηλοῖ ὅτι, χαρακτηρίζοντες (ἀντιθέτως πρὸς τὰ προη-

Σχ. 123



γούμενα) τὴν πρὸς τὰ δεξιὰ Ῥοπὴν τοῦ P_2 ὡς θετικὴν καὶ τὴν πρὸς τ' ἄριστερά τοῦ P_1 ὡς ἀρνητικὴν, διὰ νὰ ἔχωμεν ἰσορροπίαν πρέπει καὶ πάλιν τὸ (ἀλγεβρικὸν) ἄθροισμα τῶν Ῥοπῶν νὰ εἶναι $= 0$.

Ὁ τελευταῖος χαρακτηρισμὸς τῆς φοράς τῆς στροφῆς θετικῆς (+) πρὸς τὰ δεξιὰ καὶ ἀρνητικῆς (—) πρὸς τ' ἄριστερά, εἶναι ὁ συνηθέστερος.

Δυνατὸν νὰ ὑπάρχωσιν ἐπὶ τῆς μιᾶς ἢ καὶ ἀμφοτέρων τῶν πλευρῶν ἐκατέρωθεν τοῦ κέντρου στροφῆς περισσότερα Φορτία (Σχ. 123). Ἡ Φυσικὴ διδάσκει διὰ τὴν περίπτωσηιν ταύτην, (δυνάμεθα δ' εὐκόλως νὰ πεισθῶμεν πειραματιζόμενοι δι' ἑνὸς ἀπλοῦ Μοχλοῦ), ὅτι ὑφίστα-

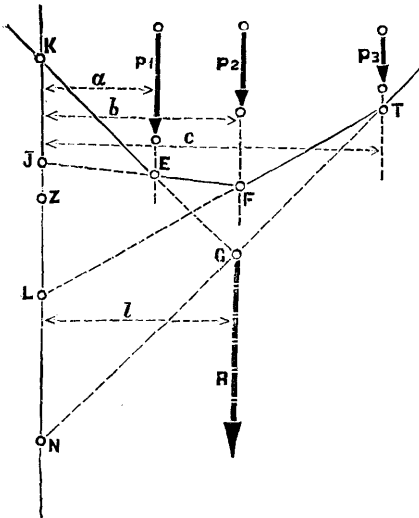
ται ισορροπία, ὅταν τ' ἄθροίσματα τῶν Ῥοπῶν στροφῆς ἐκατέρωθεν εἰσιν ἴσα, ἤτοι ὅταν ἔχωμεν (Σχ. 123) :

$$P_1 \cdot l_1 + P_2 \cdot l_2 = P_3 \cdot l_3 + P_4 \cdot l_4 + P_5 \cdot l_5.$$

Τὴν ἀνωτέρω ἐξίσωσιν δυνάμεθα νὰ γράψωμεν καὶ οὕτω :

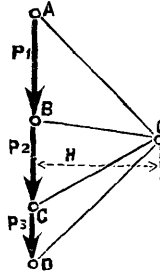
$$P_1 \cdot l_1 + P_2 \cdot l_2 - P_3 \cdot l_3 - P_4 \cdot l_4 - P_5 \cdot l_5 = 0.$$

Σχ. 124



Τοῦθ' ὅπερ δηλοῖ ὅτι, ἂν χαρακτηρίσωμεν τὰς πρὸς τὰ δεξιὰ Ῥοπὰς ὡς θετικὰς (+) καὶ τὰς πρὸς τ' ἀριστερὰ ὡς ἀρνητικὰς (—), ἔχομεν, διὰ τὴν

Σχ. 125



περίπτωσιν τῆς ισορροπίας, τὸ (ἀλγεβρικὸν) ἄθροισμα τῶν Ῥοπῶν = 0.

§ 19. Ῥοπὴ πλειοτέρων Δυνάμεων.

Εἰς τὸ Σχ. 124 παρουσιάζονται πλείοτεραι παράλληλοι Δυνάμεις P_1 , P_2 καὶ P_3 , τῶν ὁποίων ἡ Συνισταμένη εἶναι ἡ R .

Αἱ Ροπαὶ τῶν τριῶν Δυνάμεων μὲ κέντρον στροφῆς οἰονδήποτε σημεῖον Ζ εἰσίν:

$$M_1 = P_1 \cdot a$$

$$M_2 = P_2 \cdot b$$

$$M_3 = P_3 \cdot c$$

Καὶ ἡ Ροπή τῆς Συνισταμένης, ὡς πρὸς τὸ αὐτὸ κέντρον Ζ, εἶναι

$$M = R \cdot l$$

Ἐὰν καλέσωμεν Η τὴν ἀπόστασιν τοῦ Πόλου Ο ἀπὸ τοῦ Δυναμοσυρμοῦ (Σχ. 125), προκύπτει ἐκ τῆς ὁμοιότητος τῶν τριγώνων ΑΟΒ καὶ ΚΕJ.

$$\frac{AB}{H} = \frac{KJ}{a}, P_1 \cdot a = H \cdot KJ = M_1$$

Ἐπίσης προκύπτει ἐκ τῆς ὁμοιότητος τῶν τριγώνων ΒΟC καὶ JFL:

$$\frac{BC}{H} = \frac{JL}{b}, P_2 \cdot b = H \cdot JL = M_2$$

Καὶ ἐκ τῆς ὁμοιότητος τῶν τριγώνων CΟD καὶ LTN προκύπτει:

$$\frac{CD}{H} = \frac{LN}{c}, P_3 \cdot c = H \cdot LN = M_3.$$

Τέλος ἐκ τῆς ὁμοιότητος τῶν τριγώνων ΑΟD καὶ KGN προκύπτει:

$$\frac{AD}{H} = \frac{KN}{l}, R \cdot l = H \cdot KN = M$$

Εἶναι λοιπὸν

$$M_1 + M_2 + M_3 = H (KJ + JL + LN) = H \cdot KN = M$$

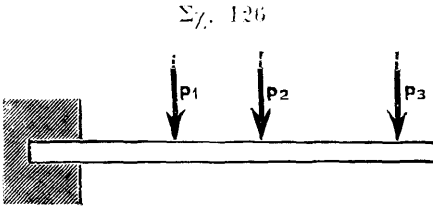
ἢτοι

$$M_1 + M_2 + M_3 = M.$$

Τοῦθ' ὅπερ σημαίνει: Ἡ Ροπή τῆς Συνισταμένης εἶναι ἰση

πρὸς τὸ ἄθροισμα τῶν Ροπῶν τῶν Σύνιστωσῶν ἀναφερομένων εἰς τὸ αὐτὸ κέντρον στροφῆς.

Ὁ Κανὼν οὗτος εἶναι πολὺ σημαντικός· εἶναι γνωστὸς ὡς «*Νόμος τῶν Ροπῶν*» καὶ ἐφαρμόζεται εἰς πλείστας περιπτώσεις.

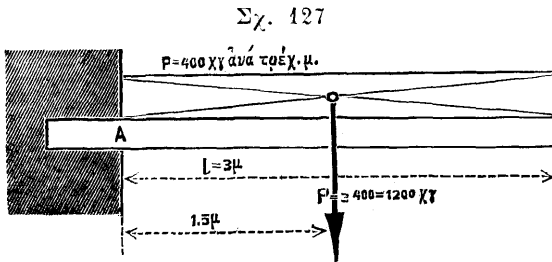


Δοκὸς πεπακτωμένη εἰς τὸ ἓν ἄκρον καὶ ἐλευθέρη

εἰς τὸ ἕτερον (Σχ. 126), ὑποβαστάζουσα τρία φορτία P_1 , P_2 καὶ P_3 ἔχει νὰ ὑποφέρῃ εἰς τὴν θέσιν τῆς πακτώσεως, Ροπὴν κάμψεως $M=R.l$.

§ 20. Παραδείγματα.

Εἰς τὸ Σχ. 127 παρίσταται μία Δοκὸς πεπακτωμένη εἰς τὸ ἓν ἄκρον, ἐλευθέρη εἰς τὸ ἕτερον καὶ ἰσοπαχῶς (μὲ σιτηρά, γῆν καὶ τὰ παρόμοια) φορτωμένη καθ' ὅλον αὐτῆς



τὸ ἐλεύθερον μῆκος. Τὸ ὅλον φορτίον ἀνέρχεται εἰς 1200 χγ. καὶ εἰς τὸ τρέχον μέτρον ἀναλογεῖ τὸ φορτίον

$$\frac{1200}{3} = 400 \text{ χγ.}$$

Ἡ Συνισταμένη τοῦ ἰσοπαχῶς ἐπὶ τῆς Δοκοῦ διανεμημένου φορτίου φυσικῶς ἐνεργεῖ εἰς τὸ μέσον· ἐπομένως ὁ μοχλοβραχίων αὐτῆς εἶναι 1,5 μ., ἡ δὲ Ροπή κάμψεως περὶ τὸ σημεῖον πακτώσεως εἶναι :

$$1200 \text{ χγ.} \times 1,5 \text{ μ.} = 1800 \text{ χγ. μ.}$$

Κατὰ τὸν ἐν τοῖς προηγούμενοις ἀναπτυχθέντα Νόμον, τὸ αὐτὸ μέγεθος ἔχει καὶ ἡ Ροπή κάμψεως τοῦ ἰσοπαχῶς διανεμημένου φορτίου, εἰς τὴν Ροπήν ἔχει ν' ἀνθέξις ἡ Δοκὸς παρὰ τὴν θέσιν τῆς πακτώσεως.

Καλοῦντες l τὸ ἐλεύθερον τῆς Δοκοῦ μῆκος, p τὸ ἀνὰ τρέχον μέτρον φορτίον, ἔχομεν τὸ ὅλον φορτίον

$$P = p.l$$

Ἡ δὲ Ροπή κάμψεως εἰς τὸ σημεῖον πακτώσεως ἔσεται :

$$M = \frac{P.l}{2} = p.l \cdot \frac{l}{2} = \frac{p.l^2}{2}$$

Ἐὰν ὀλοκλήρῳ τὸ φορτίον ἐνέργει εἰς τὸ ἐλεύθερον ἄκρον τῆς Δοκοῦ (ὡς γίνεται τοῦτο ἐν τῷ Σχ. 120), τότε ἡ Ροπή κάμψεως θὰ ἦτο $M = P.l$, ἢτοι διπλασία τῆς προκαλουμένης, ὅταν τὸ αὐτὸ φορτίον P εἶναι ἰσοπαχῶς διανεμημένον ἐφ' ὀλοκλήρου τῆς Δοκοῦ (Σχ. 127).

Θέματα. Νὰ προσδιορίσωμεν τὴν Ροπήν κάμψεως διὰ μίαν Δοκὸν ὡς ἡ τοῦ Σχ. 127 καὶ διὰ φορτία p καὶ μήκη l , τὰ ἀκόλουθα :

$p = 300, 350, 400, 500$ καὶ 600 χγ. ἀνὰ τρεχ. μ.

$l = 3,0, 3,0, 2,5, 2,0$ καὶ $1,5$ μέτρα.

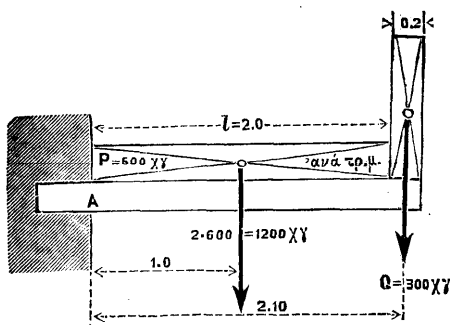
Τὸ Σχ. 128 παριστᾷ Δοκὸν ὑποβαστάζουσαν ἐξώστην (φορεῖον ἐξώστου, φρούσιον), ἡ ὁποία ὑποφέρει ἀνὰ τρέχον μέτρον μήκους ἐν φορτίον $p = 600$ χγ. (ἴδιον βάρος, πλακόστρωσιν, Ἀνθρώπους κ.λ.), πρὸς δὲ ὑποβαστάζει ἐν Στιθαίον ἐπὶ τοῦ ἐλευθέρου ἄκρου βάρους $Q = 300$ χγ.

Ἡ Ροπή κάμψεως εἰς τὸ σημεῖον πακτάσεως παρὰ τὸ Λ εἶναι:

$$M = 600 \cdot \frac{2,0 \cdot 2,0}{2} + 300 \cdot 2,1$$

$$= 1200 + 630 = 1830 \text{ χγ. μ.}$$

Σχ. 128



Θέματα. Ὑπολογίσωμεν τὴν Ροπήν κάμψεως διὰ φορεῖα ἐξωστών δεδομένων τῶν ἀκολουθῶν στοιχείων:

$l = 2,2 \ 2,4 \ 2,6 \ 2,8$ καὶ $3,0$ μ.

$p = 750, 600, 500, 450$ καὶ 400 χγ. ἀνὰ τρεχ. μ.

Πάχος Στηθαίου $= 0,20$ μ. καὶ βάρος αὐτοῦ $Q = 450, 400, 350, 300$ καὶ 250 χγ.

§ 21. Προσδιορισμὸς τῶν Κέντρων βαρύτητος διὰ τῶν Ροπῶν.

Τὸν Νόμον τῶν Ροπῶν δυνάμεθα νὰ ἐφαρμόσωμεν διὰ νὰ εὕρωμεν τὴν Συνισταμένην παραλλήλων Δυνάμεων, συνεπῶς καὶ διὰ τὸν προσδιορισμὸν Γραμμῶν καὶ Κέντρων βαρύτητος.

Εἰς τὸ Σχ. 129 εἶναι δεδομένη ἡ διατομὴ γωνια-

κοῦ τινος ἐλάσματος. Λαμβάνομεν ἓν οἰονδήποτε σημεῖον ὡς κέντρον στροφῆς, ἔστω τὴν κορυφὴν Α.

Τὸ μέγεθος τῆς Συνισταμένης R εἶναι γνωστὸν $= P_1 + P_2$ καὶ εἶναι ἄγνωστος μόνον ἡ ἀπόστασις αὐτῆς ἀπὸ τοῦ σημείου Α. Ἐστω l ἡ ἀπόστασις αὕτη. Κατὰ τὸν Νόμον τῶν Ροπῶν ἔχομεν :

$$R \cdot l = P_1 \cdot a + P_2 \cdot b$$

καὶ εἰς ἀριθμοὺς
 $(7+8) \cdot l = 7 \cdot 0,5 + 8 \cdot 4,0$
 ἐξ οὗ προκύπτει :

$$l = \frac{3,5 + 3,2}{15} = 2,367 \text{ ἐκ.}$$

Ἀπλοποιοῦνται αἱ πράξεις, ἐὰν ἐκλέξωμεν ὡς κέντρον στροφῆς τὸ σημεῖον Β, ὅπερ εὐρίσκεται ἐπ' αὐτῆς τῆς γραμμῆς ἐνεργείας τοῦ φορτίου P_1 · τότε εἶναι :

$$a_1 = 0 \quad \text{καὶ} \quad b_1 = 3,5.$$

Καὶ ἔχομεν :

$$R \cdot l_1 = P_1 \cdot 0 + P_2 \cdot b_1$$

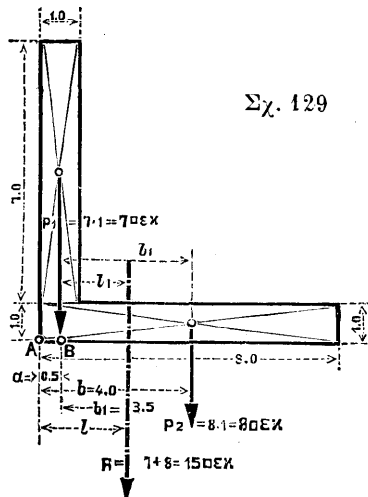
καὶ εἰς ἀριθμοὺς

$$15 \cdot l_1 = 8 \cdot 3,5$$

ἐξ οὗ προκύπτει :

$$l_1 = \frac{28,0}{15} = 1,867 \text{ ἐκ.}$$

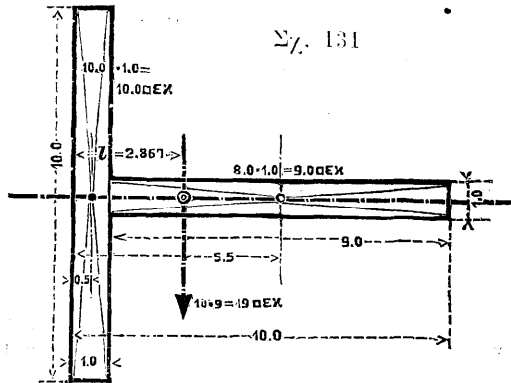
Τὸ l_1 εὐρέθη κατὰ 0,50 ἐκ. μικρότερον τοῦ προηγουμένου, ὡς ἀνεμένετο.



θέσιν δευτέρας Γραμμῆς βαρύτητος, κατέτοι τῶ ἄξονι
συμμετρίας, εὐρίσκομεν εὐκόλως ὡς ἑξῆς :

$$\text{Ἔχομεν : } 19.1 = 9.5,5 + 10.0,5$$

$$\text{Ἐπομένως : } 1 = \frac{49,5 + 5,0}{19} = 2,867 \text{ ἐκ.}$$



Θέματα : Νὰ εὗρωμεν τὰ Κέντρα βαρύτητος διατο-
μῶν γωνιακῶν ἀνισοσκελῶν ἐλασμάτων ἐχόντων ἀντί-
των διαστάσεων :

8 ἐκ., 12 ἐκ. καὶ 1,5 ἐκ. τοῦ Σχ. 130
τάς ἀκολουθοῦς :

6,5	ἐκ.	10	ἐκ.	1,0	ἐκ.
5	»	10	»	1,0	»
8	»	16	»	1,2	»
10	»	20	»	1,6	»

Νὰ πρᾶξωμεν τὸ αὐτὸ διὰ διατομᾶς Σχημάτων ἐχούσας
ἀντὶ τῶν διαστάσεων

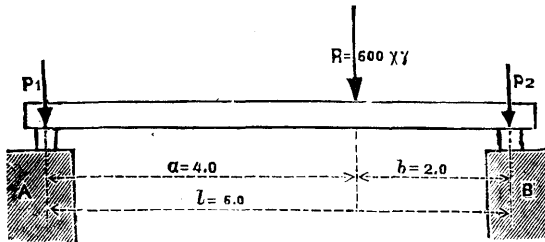
10 ἐκ., 10 ἐκ. καὶ 1,0 ἐκ. τοῦ Σχ. 131
τάς ἀκολουθοῦς,

6	έκ.	6	έκ.	0,6	έκ.
8	»	8	»	0,8	»
12	»	12	»	1,2	»
14	»	14	»	1,4	»

§ 22. Προσδιορισμός των Έδروπιέσεων διὰ των Ροπών.

Ὁ Νόμος των Ροπών δύναται νὰ ἐφαρμοσθῇ διὰ τὴν ἀποσύνθεσιν μιᾶς Δυνάμεως εἰς δύο ἄλλας παραλλήλους, των ὁποίων εἰσὶ δεδομένοι αἱ γραμμαὶ ἐνεργείας.

Σχ. 132



Τοῦτο χρησιμεύει πολλάκις διὰ νὰ προσδιορισθῇ ἡ Πίεσις, ἣν οἰαδήποτε Φορεῖα ἀσκοῦσιν ἐπὶ των Βάθρων ἢ Ἑδρῶν των.

Εἰς τὸ Σχ. 132 ἐν Φορτίον R ὑποβαστάζεται ὑπὸ μιᾶς Δοκοῦ AB . Ἡ Δοκὸς ἐξασκεῖ (ἐκτὸς τοῦ ἰδίου της βάρους) ἔνεκα τοῦ φορτίου ὅπερ ὑποβαστάζει μίαν Πίεσιν P_1 ἐπὶ τοῦ Βάθρου A καὶ μίαν Πίεσιν P_2 ἐπὶ τοῦ Βάθρου B , των ὁποίων τὸ ἄθροισμα φυσικῶς εἶναι ἴσον πρὸς τὸ Φορτίον R .

Αἱ δύο Δυνάμεις P_1 καὶ P_2 δὲν εἶναι ἴσαι μεταξύ των, ἀλλὰ τὸ Βάθρον B , ὅπερ εὑρίσκεται πλησιέστερον τοῦ Φορτίου R , ὑποφέρει περισσότερον.

Λαμβάνοντες τὸ σημεῖον A ὑποστηρίξεως τῆς Δοκοῦ ἐπὶ τοῦ ἀριστεροῦ Βάθρου ὡς κέντρον στροφῆς, θέλομεν ἔχει κατὰ τὸν Νόμον τῶν Ῥοπῶν, τοῦ μοχλοβραχίονος τῆς Δυνάμεως P_1 ὄντος $= 0$.

$$R \cdot a = P_1 \cdot 0 + P_2 \cdot l$$

$$\text{ἴτοι} \quad P_2 = \frac{R \cdot a}{l}$$

καὶ εἰς ἀριθμούς : $600 \cdot 4 = 0 + P_2 \cdot 6$

$$\text{ἴτοι} \quad P_2 = \frac{600 \cdot 4}{6} = 400 \text{ χγ.}$$

Λαμβανομένου τοῦ B ὡς κέντρου στροφῆς, ἔχομεν :

$$R \cdot b = P_1 \cdot l + P_2 \cdot 0$$

$$\text{ἴτοι} \quad P_1 = \frac{R \cdot b}{l}$$

καὶ εἰς ἀριθμούς : $600 \cdot 2 = P_1 \cdot 6$

$$\text{ἴτοι} \quad P_1 = \frac{600 \cdot 2}{6} = 200 \text{ χγ.}$$

Τὸ ἄθροισμα :

$$P_1 + P_2 = \frac{R \cdot a}{l} + \frac{R \cdot b}{l} = \frac{R (a + b)}{l}.$$

Ἐπειδὴ δὲ εἶναι $a + b = l$, καταλίγομεν εἰς τὸ ἄλλως τε γνωστὸν ἀποτέλεσμα :

$$P_1 + P_2 = R.$$

Θέματα. Νὰ προσδιορίσωμεν τὴν Πίεσιν ἐπὶ τῶν Βάθρων εἰς τὸ Σχ. 132 μὲ ἀπόστασιν Φορτίου ἀπὸ τοῦ δεξιοῦ ἄκρου B 1,0 μ. Τὸ αὐτὸ μὲ ἀπόστασιν 3,0 μ.

Ἐπειτα τὸ αὐτὸ μὲ ἀποστάσεις 0,50 μ.

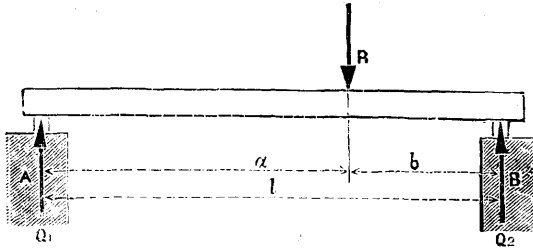
1, 5 μ., 2, 5 μ., 3, 5 μ. καὶ 4, 5 μ.

Εἰς τὸν προσδιορισμὸν τῶν Ἑδροπιέσεων ὀδηγεῖ προσέτι ἡ ἀκόλουθος θεωρία : Τὸ Φορτίον R πιέζει, μεσο-

λαβούσης τῆς Δοκοῦ, ἀμφοτέρως τὰς Ἑδρας (Βάραι). Αὗται δὲν ὑποχωροῦσιν ἀλλ' ἀνθίστανται· ἐξασκοῦσι συνεπῶς Ἀντιπίσεις, ἡ ὁποία κρατεῖ τὴν ἰσορροπίαν εἰς τὴν ἐκ τῶν ἄνω ἀσκουμένην Πίεσιν, ἐπομένως εἶναι τὸ μέγεθος ἴση πρὸς τὴν τελευταίαν.

Ἡ κατάστασις τῆς Δοκοῦ κατ' οὐδὲν μεταβάλλεται ἐὰν λάβωμεν, ἀντὶ τοῦ Βάρου, τὴν Ἀντιπίσιν του ὡς Δύναμιν ἐνεργοῦσαν ἐκ τῶν κάτω πρὸς τὰ ἄνω καὶ θεωρήσωμεν τὴν Δοκὸν (Σχ. 133) ὡς μονοσκελὴ Μοχλὸν

Σχ. 133



στρεφόμενον περὶ τὸ σημεῖον B, ἐπὶ τοῦ ὁποίου ἡ Δύναμις Q_1 κρατεῖ εἰς ἰσορροπίαν τὸ Φορτίον R. Τότε ἔχομεν κατὰ τὸν Νόμον τοῦ Μοχλοῦ :

$$Q_1 \cdot l = R \cdot \beta \quad \text{ἐξ οὗ προκύπτει}$$

$$Q_1 = \frac{R \cdot \beta}{l}$$

Ἐὰν τοὺναντίον φαντασθῶμεν τὴν Δοκὸν στρεφόμενην περὶ τὴν ἑδραν A, τότε πρέπει ἡ Δύναμις Q_2 νὰ κρατῇ εἰς ἰσορροπίαν τὸ Φορτίον R καὶ θὰ ἔχωμεν :

$$Q_2 \cdot l = R \cdot \alpha$$

$$\text{λοιπὸν} \quad Q_2 = \frac{R \cdot \alpha}{l}.$$

Εὐρίσκομεν λοιπὸν ὅτι τὰ μεγέθη τῶν Ἀντιπιέσεων (Ἀντιδράσεων) τῶν Στηριγμάτων (Στηριγματοαντιδράσεις) Q_1 καὶ Q_2 εἰσὶ τ' αὐτὰ πρὸς τὰ τῶν Ἑδροπιέσεων P_1 καὶ P_2 τῆς Δοκοῦ.

Περὶ τοῦ ὀρθοῦ τῶν ἀνωτέρω δυνάμεθα νὰ βεβαιωθῶμεν τῇ βοηθείᾳ ἐνὸς Κατασκευάσματος κατὰ τὸ ὑπόδειγμα τοῦ Σχημ. 133. Τὴν Δοκὸν AB κρεμῶμεν ἐκ τῶν ἄκρων A καὶ B ἀπὸ δύο Ζυγούς. Οἱ τελευταῖοι διδουδι τὰς ὑπὸ τοῦ φορτίου R προκαλουμένας Ἀντιπίσεις τῶν Στηριγμάτων (ηὔξημένας κατὰ τὸ βάρος τῆς Δοκοῦ ἐξ ἡμισείας).

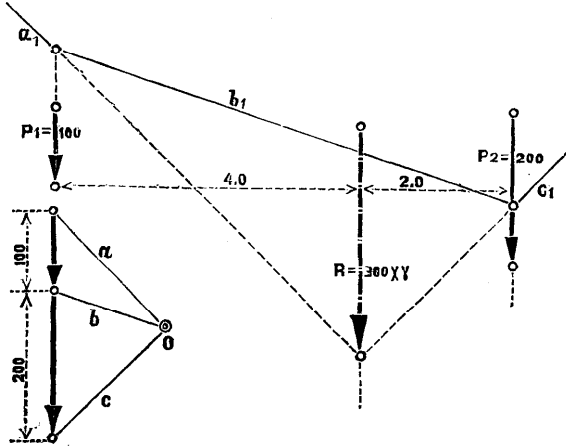
§ 23. Προσδιορισμὸς τῶν Ἑδροπιέσεων γραφικῶς.

Ἡ ἀποσύνθεσις μιᾶς Δυνάμεως εἰς δύο παραλλήλους Δυνάμεις, τῶν ὁποίων εἰσὶ δεδομέναί αἱ γραμμαὶ ἐνεργείας, γίνεται προσέτι καὶ γραφικῶς.

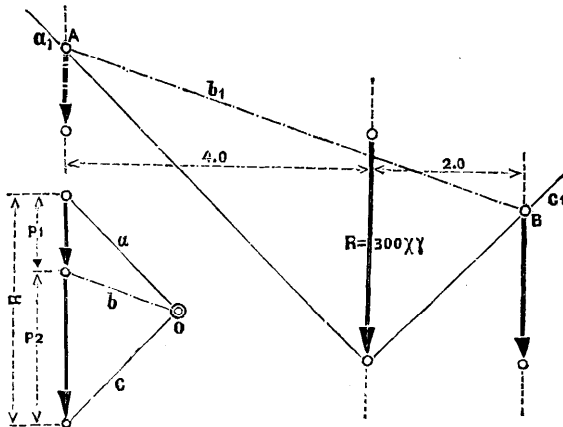
Εἰς τὸ Σχ. 134 εὐρέθη γραφικῶς ἡ Συνισταμένη R δύο κατακορύφων Δυνάμεων P_1 καὶ P_2 . Ἐὰν ἀντιθέτως εἶναι δεδομένη ἡ Δύναμις R (Σχ. 135) καὶ ζητοῦνται δύο Δυνάμεις αἱ ὁποῖαι ν' ἀφίστανται τῆς δεδομένης κατὰ 4 καὶ 2 μέτρα καὶ νὰ δύνανται ν' ἀντικαταστήσωσι τὴν δεδομένην, λαμβάνομεν ἓνα οἰονδήποτε Πόλον O καὶ χαράσσομεν τὰς ἀκτίνας a καὶ c καθὼς καὶ τὰς σχετικὰς γραμμὰς a_1 καὶ c_1 . Διὰ νὰ εὕρωμεν τὴν ὑπολειπομένην πλευρὰν b_1 τοῦ Σχοινοτόνου Πολυγώνου, ἐνοῦμεν τὰ σημεῖα A καὶ B , εἰς ἃ συναντῶσιν αἱ a_1 καὶ c_1 τὰς δεδομένας γραμμὰς τῶν ζητουμένων Δυνάμεων, καὶ ἐκ τοῦ τοῦ Πόλου O φέρομεν τὴν ἀκτίνα b παράλληλον τῇ AB . Ἡ τελευταία αὕτη διαιρεῖ τὴν R εἰς δύο τμήματα, τὰ ὁποῖα εἶναι τὰ μεγέθη τῶν ζητουμένων Δυνάμεων, ἀφοῦ

ἡ Συνισταμένη τούτων εἶναι αὐτὴ ἡ R . Τὴν γραμμὴν AB καλοῦμεν τὴν κλείουσαν πλευρὰν τοῦ Σχοινοτόνου Πο-

Σχ. 134



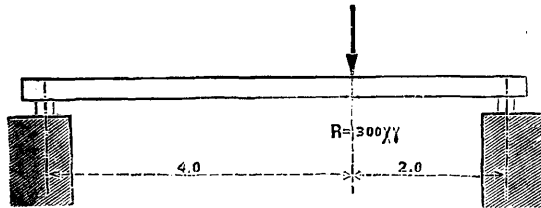
Σχ. 135



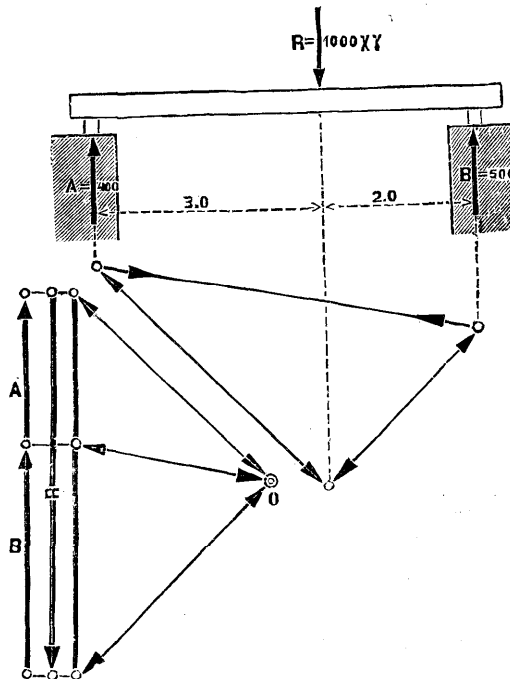
λυγώνου. Ἐὰν ἐκλέξωμεν ἄλλον Πόλον τοῦ Δυναμοσυρ-
μοῦ, τότε λαμβάνουσι μὲν αἱ ἀκτῖνες a , b καὶ c ἄλλας

διευθύνσεις, προκύπτουσιν ὅμως πάντοτε αἱ αὐταὶ Συνιστώσαι P_1 καὶ P_2 . Δοκιμασθήτω τὸ τοιοῦτον.

Σχ. 136



Σχ. 137



Ὅταν ἔχωμεν μίαν Δοκὸν (Σχ. 136), ἡ ὁποία ὑποβα-

στάζει φορτίον τι R , τὰ δὲ Στηρίγματα ἀπέχουσι 4,0 καὶ 2,0 μ. ἀπὸ τῆς R , αἱ P_1 καὶ P_2 (Σχ. 135) παριστάσι τὰς Ἑδροπιέσεις τῆς ἐν λόγῳ Δοκοῦ.

Θέματα. Νὰ προσδιορίσωμεν γραφικῶς τὰς ἐπὶ τῶν Βάθρων Πιέσεις μιᾶς Δοκοῦ 10 μέτρων ἀνοίγματος, ὅταν εἰς τὸ μέσον ἐνεργῇ ἓν φορτίον 1000 χγ.

Τὸ αὐτὸ ὅταν τὸ φορτίον ἀπέχει 4,0 μ. καὶ 2,0 μ. ἀπὸ τοῦ ἀριστεροῦ Βάθρου.

Νὰ προσδιορίσωμεν τὰς Ἑδροπιέσεις τῶν αὐτῶν ὡς ἂν θεμάτων δι' ὑπολογισμῶν.

Εἰς τὸ Σχ. 137 ἐχαράχθησαν τὸ τε Δυναμοπολύγωνον καὶ τὸ Σχοινοτόνον Πολύγωνον διὰ τὸ φορτίον R καὶ τὰς δύο Στηριγματοαντιδράσεις A καὶ B . Ἀμφότερα κλείουσι, τοῦθ' ὅπερ σημαίνει, ὅτι αἱ τρεῖς Δυνάμεις εὐρίσκονται ἐν ἰσορροπίᾳ ἢ ὅτι, ἡ Δοκὸς εὐρίσκεται ἐν ἰσορροπίᾳ ὑπὸ τὴν ἐπίδρασιν τῶν τριῶν Δυνάμεων R , A καὶ B .

§ 24. Ἑδροπιέσεις Δοκοῦ ὁριζουμένης διὰ περιόδου ὁριζων ὁριζίων (Γραφικὴ μέθοδος)

Ὅταν ἡ Δοκὸς ὑποβαστάζῃ περισσότερα φορτία Q_1 , Q_2 , Q_3 καὶ Q_4 (Σχ. 138), τότε δυνάμεθα νὰ τὰ συνθέσωμεν τῇ βοήθειᾳ ἑνὸς Σχοινοτόνου Πολυγώνου εἰς μίαν Συνισταμένην R καὶ ν' ἀποσυνθέσωμεν τὴν τελευταίαν εἰς τὰς δύο Ἑδροπιέσεις P_1 καὶ P_2 χαράσσοντες τὴν κλείουσαν γραμμὴν s_1 , καὶ τὴν σχετικὴν εἰς τὸν Δυναμοσυρμὸν παράλληλον s (σχ. 139). Ἀλλὰ δυνάμεθα προσέτι νὰ χαράξωμεν τὰς γραμμὰς s_1 καὶ s , καὶ συνεπῶς νὰ προσδιορίσωμεν τὰς ζητούμενας Ἑδροπιέσεις P_1 καὶ P_2 , χωρὶς νὰ ἐπεκτείνωμεν μέχρι συναντήσεώς των τὰς πλευράς a_1 καὶ e_1 τοῦ Σχοινοτόνου Πολυγώνου, ὅπως ὀρίσωμεν τὴν

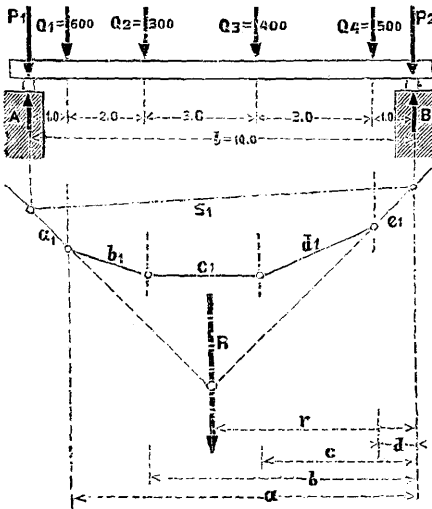
θέσιν τῆς R , ὡς τοῦτο γίνεται δηλὸν ἐκ τοῦ Σχεδίου. Αἱ Στιριγματοαντιδράσεις A καὶ B εὐρίσκονται ἐν ἰσορροπία πρὸς τὰ δεδομένα φορτία Q_1, Q_2, Q_3 καὶ Q_4 , διότι τὸ σχετικὸν Δυναμοπολύγωνον καὶ Σχοινότονον Πολύγωνον κλείουσι.

Θέματα. Νὰ προσδιορίσωμεν γραφικῶς τὰς ἐδροπιέσεις μιᾶς Δοκοῦ δεδομένων τῶν ἐν τῷ Σχ. 140 σημειωμένων φορτίων.

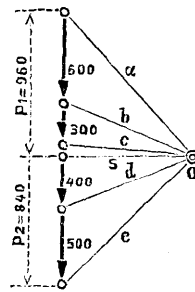
§ 25. Ἐδροπιέσεις Δοκοῦ φορτωμένης μετὰ περισσώτερα φορτία (ὑπολογισμός).

Ὅταν θέλωμεν δι' ὑπολογισμοῦ νὰ προσδιορίσωμεν τὰς Ἐδροπιέσεις δυνάμεθα ἐν πρώτοις νὰ ὑπολογίσωμεν τὴν θέσιν τῆς Συνισταμένης.

Σχ. 138



Σχ. 139



Διὰ τὰ εἰς τὸ Σχ. 138 δεδομένα φορτία προκύπτει ἡ ἐν λόγω θέσις ἐκ τῆς ἐπομένης ἐξισώσεως.

$$R \cdot r = Q_1 \cdot a + Q_2 \cdot b + Q_3 \cdot c + Q_4 \cdot d$$

$$r = \frac{Q_1 \cdot a + Q_2 \cdot b + Q_3 \cdot c + Q_4 \cdot d}{R}$$

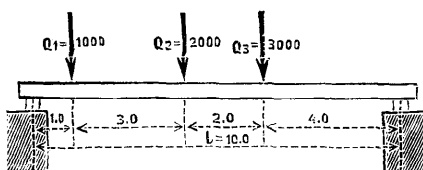
μεθ' ὃ ὑπολογίζεται ἡ ἔδروπίσις P_1 ἐκ τῆς ἐξίσωσως

$$P_1 \cdot l = R \cdot r$$

$P_1 = \frac{R \cdot r}{l}$ καὶ ἐὰν θέσωμεν τὴν ἀξίαν τοῦ r , εὐρίσκομεν:

$$\begin{aligned} P_1 &= \frac{R}{l} \left(\frac{Q_1 \cdot a + Q_2 \cdot b + Q_3 \cdot c + Q_4 \cdot d}{R} \right) \\ &= \frac{Q_1 \cdot a + Q_2 \cdot b + Q_3 \cdot c + Q_4 \cdot d}{l} \end{aligned}$$

Σχ. 140.



Εἰς τὴν αὐτὴν ἀξίαν τοῦ P_1 καταλήγομεν ἀπλούστερον διὰ τῶν ἀκολουθῶν συλλογισμῶν: Ἐὰν εἶχομεν ἐπὶ τῆς Δοκοῦ μόνον

τὸ φορτίον Q_1 , τότε ἡ σχετικὴ Ἐδروπίσις ἡ προκαλουμένη ὑπὸ μόνου τοῦ φορτίου τούτου θὰ ἦτο $A_1 = \frac{Q_1 \cdot a}{l}$ (ὄρα Σχ. 132 καὶ 133).

Διὰ τὸ φορτίον Q_2 μόνον θὰ εἶχομεν ἐπίσης $A_2 = \frac{Q_2 \cdot b}{l}$

Διὰ τὸ φορτίον Q_3 $A_3 = \frac{Q_3 \cdot c}{l}$

καὶ διὰ τὸ φορτίον Q_4 $A_4 = \frac{Q_4 \cdot d}{l}$

Κατὰ συνέπειαν ἡ Ἐδروπίσις καὶ τῶν τεσσάρων ὁμοῦ φορτίων Q_1 , Q_2 , Q_3 καὶ Q_4 δὲν εἶναι ἄλλη παρὰ τὸ ἄθροισμα τῶν μερικῶν Ἐδروπιέσεων, λοιπὸν ἔχομεν

$$\begin{aligned} P_1 &= A_1 + A_2 + A_3 + A_4 \\ &= \frac{Q_1 \cdot a + Q_2 \cdot b + Q_3 \cdot c + Q_4 \cdot d}{l} \end{aligned}$$

ὅσην εὐρομεν αὐτὴν καὶ προηγουμένως.

Δυνάμεθα προσέτι νά θεωρήσωμεν τὴν Δοκὸν (Σχ. 138) ὡς ἓνα μονοσκελὴ Μοχλὸν στρεφόμενον περὶ τὸ σημεῖον B, παρὰ τῷ ὁποίῳ ἡ πρὸς τὰ ἄνω διευθυνομένη Ἀντίδρασις τοῦ Στηρίγματος A κρατεῖ τὴν ἰσορροπίαν εἰς τὰ φορτία Q_1, Q_2, Q_3 καὶ Q_4 .

Τότε ἔχομεν:

$$A \cdot l = Q_1 \cdot a + Q_2 \cdot b + Q_3 \cdot c + Q_4 \cdot d$$

$$A = \frac{Q_1 \cdot a + Q_2 \cdot b + Q_3 \cdot c + Q_4 \cdot d}{l}$$

καὶ παρεισάγοντες τοὺς ἀριθμοὺς ἔχομεν:

$$A \cdot 10 = 600 \cdot 9 + 300 \cdot 7 + 400 \cdot 4 + 500 \cdot 1$$

$$A \cdot 10 = 5400 + 2100 + 1600 + 500 \text{ χγ. μ.}$$

$$A = \frac{9600}{10} = 960 \text{ χγ.}$$

Διὰ νά εὕρωμεν τὴν Ἀντίδρασιν τοῦ δεξιοῦ Βάρου, λαμβάνομεν τὴν Δοκὸν ὡς Μοχλὸν κινούμενον περὶ τὸ A καὶ ἔχομεν:

$$B \cdot 10 = 600 \cdot 1 + 300 \cdot 3 + 400 \cdot 6 + 500 \cdot 9$$

$$= 600 + 900 + 2400 + 4500 = 8400 \text{ χγ. μ.}$$

$$B = \frac{8400}{10} = 840 \text{ χγ.}$$

$A + B = 960 + 840 = 1800 \text{ χγ.}$, ἴσον πρὸς τὸ ἄθροισμα τῶν Φορτίων.

Ὅταν ἔχωμεν ὑπολογίσει τὴν μίαν τῶν Ἀντιδράσεων, π. χ. τὴν A, δυνάμεθα νά εὕρωμεν τὴν B ἐκ τῆς συνθήκης $A + B = R$, ἐξ ἧς προκύπτει:

$$B = R - A = 1800 - 960 = 840 \text{ χγ.}$$

Ἄλλ' εἶναι προτιμότερον νά διεξάγωμεν τοὺς ὑπολογισμοὺς τῶν ἐξισώσεων τῶν Ῥοπῶν δι' ἀμφοτέρας τὰς Ἀντιδράσεις, ἵνα κατόπιν, ἐφαρμόζοντες τὴν συνθήκην $A + B = R$, βεβαιώμεθα ἐὰν ὀρθῶς ἢ οὐ ὑπελογίσασμεν

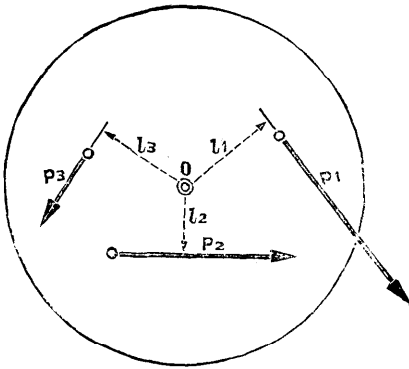
τὰς Ἀντιδράσεις, ἀφοῦ πάντως διὰ τὴν μίαν ἐξ αὐτῶν εἴμεθα ὑποχρεωμένοι νὰ διεξάγωμεν τοὺς διὰ τῆς μεθόδου τῶν Ῥοπῶν ὑπολογισμούς.

Θέμα. Νὰ προσδιορίσωμεν τὰς Ἑδροπιέσεις τῆς ἐν τῷ Σχ. 140 δεικνυομένης Δοκοῦ δι' ὑπολογισμοῦ.

§ 26. Δυνάμεις διαφόρων διευθύνσεων.

Ὅταν ἔχωμεν Δυνάμεις διευθυνομένας διαφοροτρόπως

Σχ. 141



(Σχ. 141), καλοῦμεν τὰς ἐκ τοῦ κέντρου στροφῆς ἐπὶ τὰς γραμμὰς τῶν Δυνάμεων φερομένας καθέτους (l_1, l_2, l_3) τοὺς μοχλοβραχίονας τῶν Δυνάμεων τούτων. Διὰ πειραμάτων ἀποδεικνύεται, ὅτι ἐπικρατεῖ ἰσορροπία, ὅταν τὸ ἄθροισμα τῶν πρὸς τ' ἀρι-

στερὰ Ῥοπῶν στροφῆς εἶναι ἴσον πρὸς τὸ ἄθροισμα τῶν πρὸς τὰ δεξιὰ (Σχ. 141).

$$P_1 \cdot l_1 = P_2 \cdot l_2 + P_3 \cdot l_3.$$

Ἡ ἐξίσωσις αὕτη δύναται νὰ διατυπωθῇ καὶ οὕτω :

$$P_1 \cdot l_1 - P_2 \cdot l_2 - P_3 \cdot l_3 = 0.$$

Τουθ' ὅπερ δηλοῖ: Ἐάν χαρακτηρίσωμεν ὡς Ῥοπὰς θετικὰς (+) τὰς προκαλοῦσας στροφὴν πρὸς τὰ δεξιὰ, καὶ ὡς Ῥοπὰς ἀρνητικὰς (—) τὰς ἀντιθέτου ἐνεργείας, τότε μόνον ὑφίσταται ἰσορροπία, ὅταν τὸ (ἀλγεβρικὸν) ἄθροισμα τῶν Ῥοπῶν στροφῆς εἶναι $= 0$.

Κατὰ συνέπειαν ὁ Νόμος τῶν Ροπῶν Δυνάμεων διαφορῶν διευθύνσεων εἶναι αὐτὸς οὗτος ὁ νόμος τῶν Ῥοπῶν κατακορυφῶν Δυνάμεων (σελίδες 62—65).

Καὶ ὁ Νόμος οὗτος εὐρίσκει συχνοτάτην ἐφαρμογὴν, ὡς ἐπὶ παραδειγματι εἰς τοὺς γωνιακοὺς Μοχλοὺς (Σχ. 142).

Ἵνα ἔχωμεν ἐκεῖ ἰσορροπίαν πρέπει νὰ εἶναι :

$$P_1 \cdot l_1 = P_2 \cdot l_2.$$

$$\text{ἢ } P_1 \cdot l_1 - P_2 \cdot l_2 = 0$$

Εἰς τὸ Σχ. 143 παρί-
στανται δύο Δυνάμεις P_1
καὶ P_2 καὶ ἡ Συνισταμένη
αὐτῶν R .

Αἱ Ροπαὶ στροφῆς καὶ
τῶν τριῶν Δυνάμεων μὲ
κέντρον στροφῆς οἰονδί-
ποτε σημεῖον O εἶναι :

$$M_1 = P_1 \cdot l_1$$

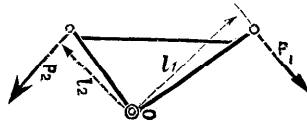
$$M_2 = P_2 \cdot l_2$$

$$\text{καὶ } M_3 = R \cdot l$$

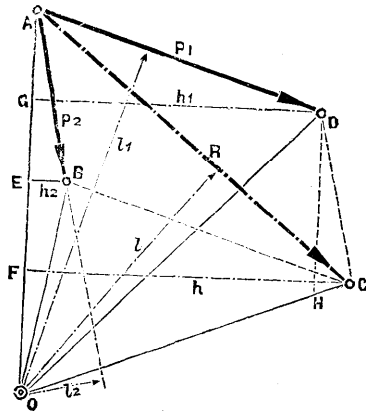
Τὰ μεγέθη $P_1 \cdot l_1$, $P_2 \cdot l_2$
καὶ $R \cdot l$ ἀνταποκρίνονται
εἰς τὸ διπλοῦν τῶν ἐπι-
φανειῶν τῶν τριγώνων,
τὰ ὅποια σχηματίζονται,
ὅταν ἐνώσωμεν τὰ ἄκρα
σημεῖα τῶν Δυνάμεων μὲ
τὸ κέντρον στροφῆς O (Σχ. 143), τῶν τριγώνων AOD ,
 AOB καὶ AOC .

Τὰ τρία τρίγωνα ἔχουσι τὴν γραμμὴν AO κοινήν. Ἐὰν
θεωρήσωμεν ταύτην ὡς βάσιν τῶν τριγώνων, καταβιβά-
σωμεν τὰ σχετικὰ ὕψη h_1 , h_2 καὶ h καὶ φέρωμεν ἐκ τοῦ

Σχ. 142



Σχ. 143



σημείου D τὴν DH παράλληλον τῇ AO, τότε βλέπομεν ὅτι τὸ ὕψος h ἀποτελεῖται ἀπὸ δύο τεμάχια CH καὶ HF, ἐκ τῶν ὁποίων εἶναι τὸ $CH = h_2$ (διότι τὰ τρίγωνα ABE καὶ DCH εἶναι ἴσα) καὶ τὸ $HF = h_1$ (ὡς πλευρὰ τοῦ ὀρθογωνίου τετραπλεύρου ODFH ἀντικειμένη τῇ πλευρᾷ h). Συνεπῶς εἶναι:

$$h = h_1 + h_2$$

Ἐντεῦθεν προκύπτει:

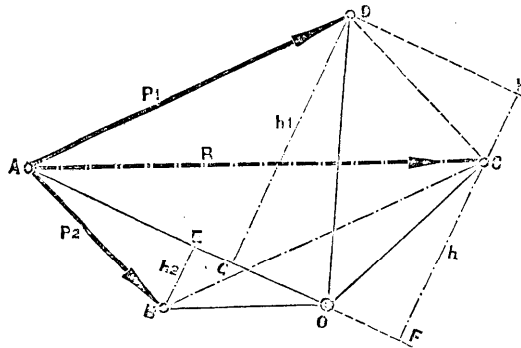
$$\Delta AOC = \Delta AOD + \Delta AOB$$

ἄρα καὶ

$$M = M_1 + M_2.$$

Τοῦτο δηλοῖ: Ἡ Ῥοπή στροφῆς τῆς Συνισταμένης εἶναι ἴση

Σχ. 144



πρὸς τὸ ἄθροισμα τῶν Ῥοπῶν στροφῆς τῶν δύο Συνιστωσῶν.

Εἰς τὸ Σχ. 144 τὸ κέντρον στροφῆς O εὐρίσκεται μετὰ τῆς R καὶ P_2 . Ἡ P_2 στρέφεται ἀριστερὰ καὶ ἡ φορὰ αὐτῆς εἶναι ἀντίθετος τῇ φορᾷ τῶν P_1 καὶ R, κατὰ συνέπειαν θὰ χαρακτηρίσωμεν τὸ M_2 ὡς ἀρνητικόν.

Καὶ ἐνταῦθα ἐχαράχθησαν τὰ εἰς τὰς Ῥοπὰς τῶν ὑπ' ὄψει Δυνάμεων ἀνταποκρινόμενα τρίγωνα AOD, AOB καὶ AOC, τὰ εἰς τὴν κοινὴν βάσιν AO ἀνήκοντα ὕψη h_1 , h_2 καὶ h ὡς καὶ ἡ DH παράλληλος τῇ βάσει AO.

Βλέπομεν ὅτι εἶναι τὸ $CH = h_2$ (διότι τὰ τρίγωνα ABE

καὶ DCH εἶναι ἴσα), καὶ τὸ $HF = h_1$ (ὡς ἀντικειμένη τῇ h_1 πλευρᾷ τοῦ ὀρθογωνίου τετραπλεύρου $GDHF$).

Ἔχομεν λοιπὸν ἐκ τοῦ Σχήματος :

$$h_1 = h + h_2$$

$$h = h_1 - h_2$$

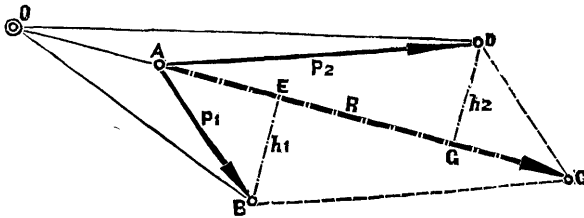
κατὰ συνέπειαν :

$$\Delta AOC = \Delta AOD - \Delta AOB$$

$$M = M_1 - M_2$$

ἦτοι: Ἡ Ὅρη στροφῆς τῆς Συνισταμένης εἶναι ἴση πρὸς τὸ (ἀλγεβρικόν) ἄθροισμα τῶν Συνιστωσῶν. / Ροσὼν τῶν

Σχ. 145



Εἰς τὸ Σχῆμα 145 τὸ κέντρον στροφῆς εὐρίσκεται ἐπὶ τῆς γραμμῆς τῆς Συνισταμένης R . Ὁ μοχλοβραχίων τῆς R εἶναι $= 0$. Τὸ τρίγωνον AOC συμπίπτει μὲ τὴν γραμμὴν OC καὶ ἡ ἐπιφάνεια αὐτοῦ (καθὼς καὶ ἡ Ὅρη στροφῆς M) εἶναι $= 0$.

Ἐπειδὴ δὲ τὰ τρίγωνα ABE καὶ CDG εἰσὶν ἴσα, ἔχομεν $h_1 = h_2$, κατὰ συνέπειαν καὶ $M_1 = M_2$. Ἀλλ' αἱ Δυνάμεις P_1 καὶ P_2 ἔχουσιν ἀντιθέτους φορὰς ἐνεργείας περὶ τὸ κέντρον στροφῆς O . Ἐπειδὴ δὲ αἱ Ὅραι αὐτῶν εἶναι ἴσαι, ἔπεται ὅτι εὐρίσκονται ἐν ἰσορροπίᾳ καὶ ἡ κοινὴ αὐτῶν ἐνέργεια εἶναι, ὡς ἡ τῆς Συνισταμένης τῶν R , ἴση τῷ μηδενί.

Καὶ διὰ πᾶσαν ἄλλην θέσιν τοῦ κέντρου στροφῆς ἀπο-

δεικνύεται ὅτι ἡ Ῥοπή στροφῆς τῆς Συνισταμένης εἶναι ἴση πρὸς τὸ ἄθροισμα τῶν Ῥοπῶν στροφῆς τῶν Συνιστωσῶν.

Θέματα. Ἀποδειχθήτω τὸ ὀρθὸν τοῦ Νόμου τούτου διὰ διαφόρους θέσεις τοῦ κέντρου στροφῆς.

Ἡ Σύνθεσις πλειοτέρων Δυνάμεων διὰ τοῦ Σχοινοτενοῦς Πολυγώνου εἶναι ἐπαναληπτικὴ σύνθεσις δύο Δυνάμεων διὰ τοῦ Παραλληλογράμμου, μὲ μόνην τὴν διαφορὰν ὅτι ἐνταῦθα μετακινούμεν Δυνάμεις ἐπὶ τῶν γραμμῶν ἐνεργείας των ἢ παρεισάγομεν δύο βοηθητικὰς Δυνάμεις ἴσας τὸ μέγεθος καὶ ἐπὶ τῆς αὐτῆς γραμμῆς ἀλλ' ἀντιθέτως ἐνεργούσας (αἱ ὁποῖαι ἐξουδετεροῦνται ἀμοιβαίως).

Καὶ εἰς τὰς δύο λοιπὸν περιπτώσεις αἱ Ῥοπαὶ μένουσιν ἀναλλοίωτοι. Ἐπειδὴ δὲ ἡ Ῥοπή στροφῆς τῆς Συνισταμένης κατὰ τὴν σύνθεσιν δύο Δυνάμεων εἶναι πάντοτε ἴση πρὸς τὸ ἄθροισμα τῶν Ῥοπῶν στροφῆς τῶν δύο Συνιστωσῶν, ἔπεται ὅτι τελευταῖον ἔσεται καὶ ἡ *Ῥοπή στροφῆς τῆς Συνισταμένης πασῶν τῶν Δυνάμεων ἴση πρὸς τὸ ἄθροισμα πασῶν τῶν Ῥοπῶν τῶν Συνιστωσῶν δι' οἷονδήποτε κέντρον στροφῆς.*

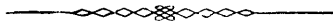
Δὲν ἴητο συνεπῶς ἀπολύτως ἀναγκαῖον νὰ ἀποδείξωμεν τὸν ἀνωτέρω Νόμον ἰδιαιτέρως διὰ τὴν περίπτωσιν τῆς § 19, καὶ ἡ ἀπόδειξις ἐκεῖνη χρησιμεύει ἀπλῶς πρὸς ἐπικύρωσιν τοῦ γενικοῦ τούτου Νόμου.

Παρατήρησις. Ἐπειδὴ ἡ Ῥοπή τῆς Συνισταμένης πολλῶν Δυνάμεων προκύπτει ἐκ τοῦ ἄθροίσματος πολλῶν μελῶν, δὲν ἔπεται ὅτι πρέπει νὰ εἶναι καὶ ἰδιαιτέρως μεγάλη, διότι πολλὰ τῶν μελῶν τούτων δύνανται νὰ ἔχωσιν ἀντίθετον φορὰν καὶ νὰ ἐξουδετερώνται ἀμοιβαίως ἐν μέρει ἢ καθόλου. Δυνατὸν νὰ συμβῇ ὥστε ὅλα τὰ μέλη νὰ ἐξουδετερώνται ἀμοιβαίως καθ' ὁλοκληρίαν. Τοῦτο θὰ συμβῇ ὅταν τὸ κέντρον στροφῆς εὕρεσκηται ἐπὶ τῆς γραμμῆς ἐνεργείας τῆς Συνισταμένης.

Τότε εἶναι καὶ ἡ Ῥοπὴ στροφῆς τῆς Συνισταμένης ὡς καὶ τὸ ἄθροισμα τῶν Ῥοπῶν τῶν Συνιστωσῶν = 0

Ἐκ τοῦ θεωρήματος τῶν Ῥοπῶν προκύπτει προσέτι τὸ ἀκόλουθον σημαντικὸν συμπέρασμα : Ὅταν πολλαὶ Δυνάμεις εὐρίσκωνται ἐν ἰσορροπίᾳ (ἄνευ τῆς ἀνάγκης σημείου τινὸς ὑποστηρίξεως), τὸ Δυναμοπολύγωνον ὡς καὶ τὸ Σχοινότονον Πολύγωνον κλείουσι (ὅρα § 17, 23 καὶ 24). Ἡ Συνισταμένη τῶν Δυνάμεων τούτων εἶναι = 0, συνεπῶς καὶ ἡ Ῥοπὴ στροφῆς τῆς Συνισταμένης ταύτης δι' οἷονδῆποτε κέντρον εἶναι = 0. Ἐπειδὴ δὲ τὸ ἄθροισμα τῶν Ῥοπῶν τῶν Συνιστωσῶν εἶναι ἴσον πρὸς τὴν Ῥοπὴν τῆς Συνισταμένης των, ἔπεται ὅτι καὶ τὸ ἄθροισμα τῶν Ῥοπῶν τῶν συνιστωσῶν εἶναι = 0. Δηλαδή : *Ὅταν ἔχωμεν πολλὰς Δυνάμεις εὐρισκομένας ἐν ἰσορροπίᾳ τὸ ἄθροισμα τῶν Ῥοπῶν στροφῆς τῶν Δυνάμεων τούτων, δι' οἷονδῆποτε κέντρον στροφῆς, εἶναι = 0.*

Περὶ τούτου δυνάμεθα εὐκόλως νὰ πεισθῶμεν, σχεδιάζοντες μερικὰς τοιαύτας Δυνάμεις (π. χ. τὰ Φορτία μιᾶς Δοκοῦ καὶ τὰς σχετικὰς Στηριγματοαντιδράσεις), προσδιορίζοντες τὰς Ῥοπὰς στροφῆς τῶν Δυνάμεων τούτων με οἷονδῆποτε κέντρον καὶ καταστρώνοντες τὸ ἄθροισμα τῶν σχετικῶν Ῥοπῶν.



ΚΕΦΑΛΑΙΟΝ Ε'.

ΔΙΚΤΥΩΤΑ

§ 27. Γενικότητες.

Τὰ δικτυωτά Φορεία αποτελοῦνται ἀπὸ Δοκοὺς ἐκ ξύλου ἢ σιδήρου (ἐλάσματα) οὕτω πῶς συνδεδεμένας, ὥστε νὰ σχηματίζωσι τρίγωνα, τὸ ἐν παρὰ τὸ ἄλλο, καὶ τὸ Σύνολον νὰ παρουσιάζῃ ἐν Σχήμα ἀμετάβλητον (Σχ. 146, 154, 162, 164, 166 καὶ 168). Τὰς θέσεις, εἰς ἃς συναντῶνται τὰ ἄκρα τῶν Δοκῶν καλοῦμεν Κόμβους.

Αἱ ἐνώσεις τῶν Κόμβων εἰσὶ στερεαὶ (ὥς ἐπὶ τὸ πλεῖστον εἰς τὰς Γεφύρας) ἢ ἀρθρωτικαὶ (σπανίως εἰς Γεφύρας, συνηθέστερον εἰς Στέγας), ἐπιτρέπουσαι μικρὰς τροφὰς τῶν Δοκῶν περὶ τοὺς Κόμβους.

Συνήθως διατίθενται τὰ τῆς φορτώσεως τῶν δικτυωτῶν Φορείων οὕτως ὥστε τὰ Φορτία νὰ ἐνεργῶσι μόνον εἰς τοὺς Κόμβους καὶ οὐχὶ εἰς ἐνδιάμεσα τῶν Δοκῶν σημεία. Αἱ Δοκοὶ ὑποφέρουσι τότε Δυνάμεις μόνον κατὰ μῆκος, ἐφελκυσμὸν ἢ θλίψιν, καὶ δὲν ὑπόκεινται εἰς κάμψιν, δι' ὃ καὶ ἀντέχουσι περισσότερον.

Σπανίως φορτῶνονται Δοκοὶ τινες τοῦ φορείου καὶ εἰς ἐνδιάμεσα σημεία. Τοῦτου συμβαίνοντος αἱ Δοκοὶ ἐργάζονται ἐπὶ κάμψει καὶ πρέπει τότε νὰ ᾧσι κατ' ἀναλογίαν ἰσχυρότεροι. Δικτυωτά Φορεία ἀρμόζουσιν ἰδίως εἰς Στεγάσματα Αἰθουσῶν, Σταθμῶν, Σιδηροδρόμων, Ἀγορῶν κ.λ. καθὰς καὶ διὰ Γεφύρας μεγάλων ἀνοιγμάτων (15 μ. καὶ ἄνω).

§ 28. Προσδιορισμός τῶν Ἐντάσεων

Εἰς τὰ προηγούμενα (Σχ. 36—50) ἐλάβομεν ἤδη ἀπορρίμιν νὰ προσδιορίσωμεν τὰς ἐντάσεις Ἐλκυστήρων καὶ Ἀμειβόντων καὶ λοιπῶν τεμαχίων διαφόρων Κατασκευασμάτων. Ἐκάστοτε εἶχομεν νὰ ἀποσυνθέτωμεν μίαν Δύναμιν εἰς δύο, ἐφελκυσμοὺς ἢ θλίψεις, αἵτινες ἐνεργοῦσιν ἐπὶ τῶν ὑπ' ὄψει Δοκῶν. Τὸ αὐτὸ πράττομεν καὶ διὰ τὰ δικτυωτὰ Φορεῖα. Μόνον παρ' αὐτοῖς συμβαίνει κατὰ τὸ πλεῖστον ἡ δεδομένη Δύναμις, ἡ ὁποία πρόκειται νὰ ἀποσυντεθῇ, νὰ εἶναι μία Συνισταμένη πολλῶν ἄλλων Δυνάμεων. Ἀρχίζομεν ἀπὸ τὸ Στήριγμα, προσδιορίζομεν τὴν Συνισταμένην τῶν ἐκεῖ ἐνεργουσῶν γνωστῶν Δυνάμεων καὶ ἀποσυνθέτομεν αὐτὴν κατὰ τὰς διευθύνσεις τῶν δύο εἰς τὸ σημεῖον τοῦτο συναντωμένων Δοκῶν τοῦ Δικτυωτοῦ. Μετὰ ταῦτα προχωροῦμεν εἰς τὸν πλησιέστερον Κόμβον, συνθέτομεν τὰς ἐπὶ τοῦ Κόμβου τούτου ἐνεργούσας γνωστὰς Δυνάμεις καὶ ἀποσυνθέτομεν τὴν Συνισταμένην αὐτῶν κατὰ τὰς διευθύνσεις τῶν δύο Δοκῶν, τῶν ὁποίων αἱ ἐντάσεις εἶναι ἀκόμη ἄγνωστοι. Τὸ αὐτὸ πράττομεν καὶ εἰς τὸν ἐπόμενον Κόμβον καὶ οὕτω καθεξῆς μέχρι τοῦ τέλους.

Ἐν ἀπλοῦν Δικτυωτὸν παριστᾷ τὸ Σχ. 146.

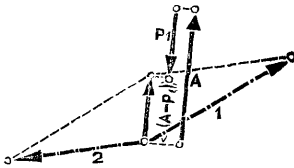
Εἰς τοὺς Κόμβους C, E καὶ F ἐνεργοῦσι τὰ φορτία $P_1 = 1800$, $P_2 = 3600$ καὶ $P_3 = 1800$ χγ., ἐν συνόλῳ 7200 χγ., κατὰ συνέπειαν ἡ ἐπὶ ἐκάστου στηρίγματος θλίψις, ἡ Ἐδροπίεσις, ἀνέρχεται εἰς $\frac{7200}{2} = 3600$ χγ.

Εἰς τὸ σημεῖον C ἐνεργεῖ πρὸς τὰ ἄνω ἡ Στηριγματοαντίδρασις A καὶ πρὸς τὰ κάτω τὸ Φορτίον P_1 . Ἐντεῦθεν προκύπτει μία πρὸς τὰ ἄνω ἐνεργοῦσα Δύναμις (A— P_1) Σχ. 147.

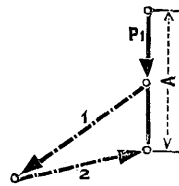
Δυνάμεις τῶν Δοκῶν 2, 3 καὶ 4, αἱ ἐνεργοῦσαι ἀπὸ τοῦ σημείου D, σχηματίζουν ἓνα κεκλεισμένον Δυναμοσυρμόν (Σχ. 150).

Εἰς τὸν Κόμβον E ἐνεργεῖ ἡ Δύναμις P_2 καὶ αἱ δύο γνωσταὶ ἴδιαι Δυνάμεις τῶν Δοκῶν 1 καὶ 3. Ὁ ἐκ τῶν

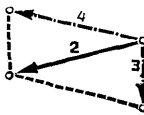
Σχ. 147



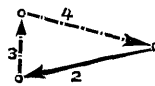
Σχ. 148



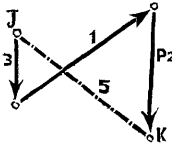
Σχ. 149



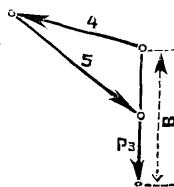
Σχ. 150



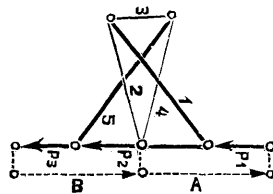
Σχ. 151



Σχ. 152



Σχ. 153
Δυναμοπολύγωνον



Κλίμαξ τῶν Σχ. 147—153
1 ἐκ. = 2000 γγ.

Δυνάμεων τούτων Δυναμοσυρμός 3, 1, P_2 (Σχ. 151) δίδει τὴν Συνισταμένην JK, ἥτις ἐνεργεῖ καταθλιπτικῶς ἐπὶ τῆς Δοκοῦ 5. Ἡ Δοκὸς μεταδίδει περαιτέρω τὴν θλίψιν πρὸς τὸ σημεῖον F καὶ θλίβει ταυτόχρονα ἀντιθέτως καὶ τὸ

σημείον Ε, αναπτύσσουσα κατὰ τῆς θλιβούσης Δυνάμεως JK ἴσην Ἀντίστασιν.

Ἡ κατὰ τοῦ σημείου Ε διευθυνομένη Δύναμις τῆς Δοκού 5 σχηματίζει μετὰ τῶν λοιπῶν εἰς τὸ αὐτὸ σημεῖον ἐνεργουσῶν Δυνάμεων 3, 1 καὶ P_2 ἓνα κλειστὸν συρμὸν (Σχ. 151).

Εἰς τὸν Κόμβον F συναντῶνται αἱ ἐντάσεις 4 καὶ 5 πρὸς τὰς ἐξωτερικὰς Δυνάμεις P_3 καὶ Β, αἵτινες ἅπασαι εἶναι ἤδη γνωσταί.

Ὑπὸ τὴν ἐπιρροὴν τῶν Δυνάμεων τούτων πρέπει τὸ σημεῖον F νὰ εὐρίσκηται ἐν ἰσορροπίᾳ ὅταν αἱ ἐντάσεις 4 καὶ 5 ἔχωσι καλῶς προσδιορισθῇ. Συνεπῶς τὸ ἐκ τῶν τεσσάρων Δυνάμεων 4, 5, P_3 καὶ Β σχηματιζόμενον Δυναμοπολύγωνον πρέπει νὰ κλείῃ. Τοῦτο ἄκριβως συμβαίνει, ὡς δεικνύει τὸ Σχ. 152, καὶ ἔχομεν οὕτω ἓνα ἑλεγχον τῆς ἀκριβείας, μεθ' ἧς προσδιωρίσθησαν ἐκ τῶν προτέρων αἱ ἐντάσεις 4 καὶ 5. Τοιαύτη τις περίπτωσις ἐλέγχου παρουσιάζεται εἰς πάντα τὰ δικτυωτὰ Φορεῖα.

Δυνάμεθα νὰ ἐνώσωμεν εἰς ἓν (Σχ. 153) πάντα τὰ εἰς τὰ Σχ. 148, 150, 151 καὶ 152 σχεδιασθέντα Δυναμοπολύγωνα. Καθίσταται οὕτω τὸ Σχέδιον ἀπλούστερον καὶ ἀκριβέστερον διότι ἀποφεύγομεν τὰ λάθη, τὰ ὅποια δυνατόν νὰ προκύψωσιν ἐκ τῆς μεταφορᾶς τῶν διαφόρων Δυνάμεων ἀπὸ τοῦ προηγούμενου Σχεδίου εἰς τὸ ἐπόμενον.

Τὸ Σχ. 153 καλοῦμεν « τὸ Δυναμοσχέδιον » τοῦ Φορείου. Ἐν τοιοῦτον δύναται νὰ σχεδιασθῇ δι' ὅλα τὰ ἐν χρήσει Φορεῖα.

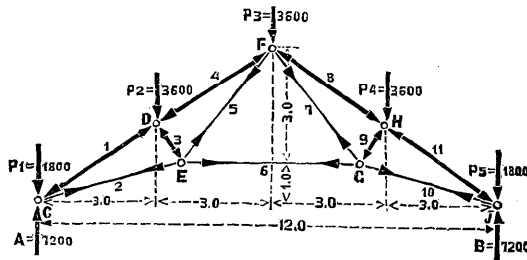
§ 29. Φορεῖα Πολωνδῶ.

Τὸ ἐν τῷ Σχ. 154 δεικνυόμενον Σχῆμα Δικτυωτοῦ καλεῖται μὲ τὸ ὄνομα τοῦ ἐφευρέτου του Πολωνδῶ (Polonceau). Εἰς τοὺς κόμβους C, D, F, H καὶ J ἐνεργοῦσι

τὰ Φορτία P_1, P_2, P_3, P_4 καὶ P_5 . Ἐκάστη Ἑδροπίστis ἀνέρχεται εἰς 7,200 χγ.

Εἰς τὸ σημεῖον C ἔχομεν τὴν Ἑδραντίδρασιν Λ καὶ τὸ Φορτίον P_1 , δίδοντα ὁμοῦ τὴν πρὸς τὰ ἄνω ἐνεργοῦσαν Συνισταμένην ($\Lambda - P_1$), (Σχ. 155). Αὕτη ἀποσυντίθεται κατὰ τὰς διευθύνσεις τῶν δύο Δοκῶν 1 καὶ 2, οὕτως ὥστε αἱ τέσσαρες Δυνάμεις νὰ σχηματίζωσιν ἓνα κεκλει-

Σχ. 154

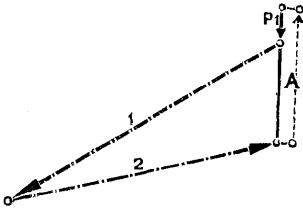


Κλίμας 1 : 200 4 εκ. = 2 μ.

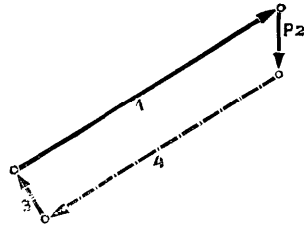
σμένον συρμόν. Τὰ σχετικὰ βέλη ἐσημειώθησαν παρὰ τὸ σημεῖον C καὶ ἀντιθέτως εἰς τὸ ἕτερον ἄκρον τῶν Δοκῶν παρὰ τοὺς Κόμβους D καὶ E (Σχ. 154).

Εἰς τὸ σημεῖον D ἀποσυνθέτομεν τὴν Συνισταμένην τῆς ἐντάσεως 1 καὶ τοῦ Φορτίου P_2 κατὰ τὰς διευθύνσεις τῶν Δοκῶν 3 καὶ 4 (Σχ. 156) καὶ σημειοῦμεν τὰ σχετικὰ βέλη ὡς καὶ πρότερον εἰς τὸ Σχ. 154. Οὕτω ἐξακολουθοῦμεν συμπληροῦντες δι' ἕκαστον Κόμβον τὸ σχετικὸν Δυναμοπολύγωνον ἐκ τῶν γνωστῶν Δυνάμεων, κλείοντες αὐτὸ διὰ τῆς προσθήκης δύο νέων πλευρῶν, ἃς χαράσσομεν παραλλήλους πρὸς τὰς διευθύνσεις τῶν δύο Δοκῶν, τῶν ὁποίων ζητοῦμεν τὰς ἐντάσεις.

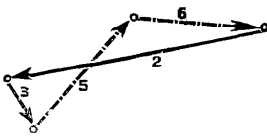
Σχ. 155
Σημείον C



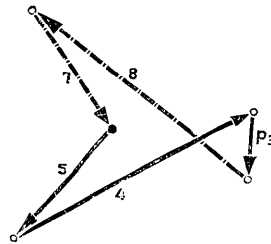
Σχ. 156
Σημείον D



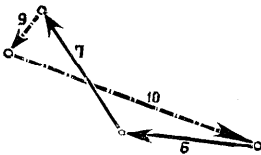
Σχ. 157
Σημείον E



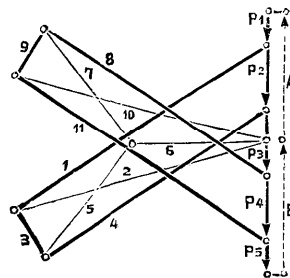
Σχ. 158
Σημείον F



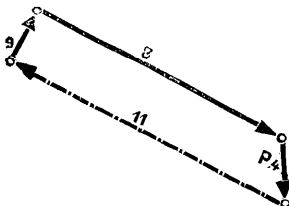
Σχ. 159
Σημείον G



Σχ. 161
Δυναμοπολύγωνον



Σχ. 160
Σημείον H



Κλίμαξ των Σχ. 155 μέχρι 161 1 εκ.=4000 χλ.

Οὕτω προκύπτουσι διὰ τὸ σημεῖον Ε αἱ εἰς τὰς Δοκοὺς 5 καὶ 6 ἐνεργοῦσαι Δυνάμεις (Σχ. 157).

Διὰ τὸ Γ αἱ τῶν Δοκῶν 7, 8 (Σχ. 158) Δυνάμεις

» » (Γ » » » 9, 10 (Σχ. 159) »

» » Η ἢ τῆς Δοκοῦ 11 (Σχ. 160) Δύναμις

Εἰς τὸ σημεῖον Ι, ἔχομεν τὸν ἔλεγχον ὅτι τὸ Δυναμοπολύγωνον Ρ₃, Β, 10, 11 κλείει. Τὸ Δυναμοπολύγωνον τοῦτο δυνάμεθα νὰ τὰ εὐρωμεν ἐν τῷ Σχ. 161, ἐν τῷ ὁποίῳ ἐνοῦνται εἰς ἓν τὰ εἰς τὰ Σχ. 155 — 160 σημειούμενα Δυναμοπολύγωνα.

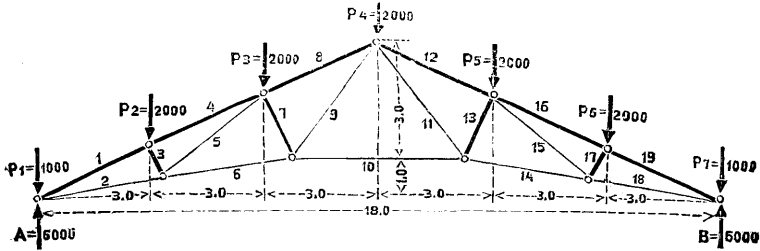
Αἱ Δοκοὶ 1, 4, 8 καὶ 11, αἵτινες περιορίζουσιν ἄνωθεν τὸ Φορεῖον ἀποτελοῦσι τὸ καλούμενον «ἄνω Πέλμα» καὶ κατ' ἀναλογίαν αἱ ἀποτελοῦσαι τὸ κάτω ὄριον Δοκοὶ 2, 6 καὶ 10 τὸ «κάτω Πέλμα».

Αἱ λοιπαὶ Δοκοὶ 3, 5, 7 καὶ 9, αἵτινες ἐνοῦσι τὰ πέλματα καλοῦνται «μέλη γεμίματος ἢ τοιχώματος» ἢ «Δοκοὶ κιγκλιδώματος» ἢ «Χιαστά». Ὅταν αἱ Δοκοὶ αὗται εἰσιν ἄλλαι μὲν κατακόρυφοι ἄλλαι δὲ κεκλιμέναι, ὥς εἰς τὰ Σχ. 166 καὶ 168, τότε καλοῦνται προσέτι αἱ μὲν κατακόρυφοι «Ὀρθοστάται» αἱ δὲ κεκλιμέναι «Διαγώνιοι».

§ 30. Ἄλλοι τύποι δικτυωτῶν Φορείων.

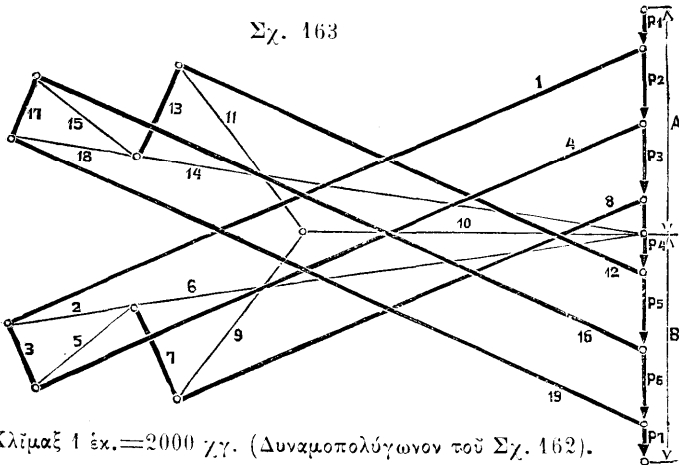
Τὰ Σχ. 162 μέχρι 169 δεικνύουσι συνηθεστάτους τινὰς τύπους δικτυωτῶν Φορείων μετὰ τῶν σχετικῶν Δυναμοσχεδίων. Ληφθῆτω ὑπ' ὄψει ὅτι τὸ ἄνω Πέλμα ὑποφέρει πάντοτε θλίψιν, τὸ κάτω πάντοτε ἐφελκυσμόν· καὶ ἐκ τῶν μελῶν τοῦ τοιχώματος ἄλλα μὲν θλίψιν ἄλλα δὲ ἐφελκυσμόν. Ἵνα γίνηται καταληπτὴ ἡ διάκρισις αὕτη ἐν τοῖς Σχεδίοις, ἐχαράχθησαν μὲ χονδράς μὲν γραμμάς αἱ θλιβόμεναι Δοκοὶ, μὲ λεπτὰς δὲ αἱ ὑποφέρουσιν ἐφελκυσμόν. Ὅταν μεταχειριζώμεθα ἐν τοῖς Σχεδίοις καὶ

Σχ. 162



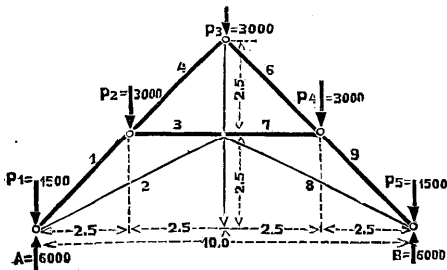
Κλίμαξ 1:200, 1 έκ. = 2 μ. (Βελγική Στέγη).

Σχ. 163



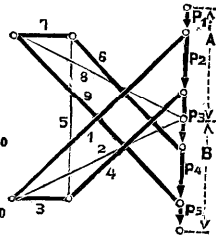
Κλίμαξ 1 έκ. = 2000 χχ. (Δυναμοπολύγωνον του Σχ. 162).

Σχ. 164



Κλίμαξ 1:200, 1 έκ. = 2 μ.
(Γερμανική Στέγη).

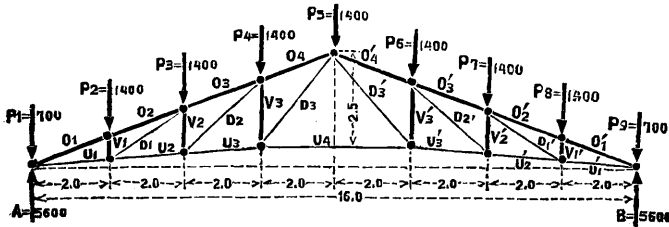
Σχ. 165



Κλίμαξ 1 έκ. = 4000 χχ.
(Δυναμοπολύγωνον του Σχ. 164).

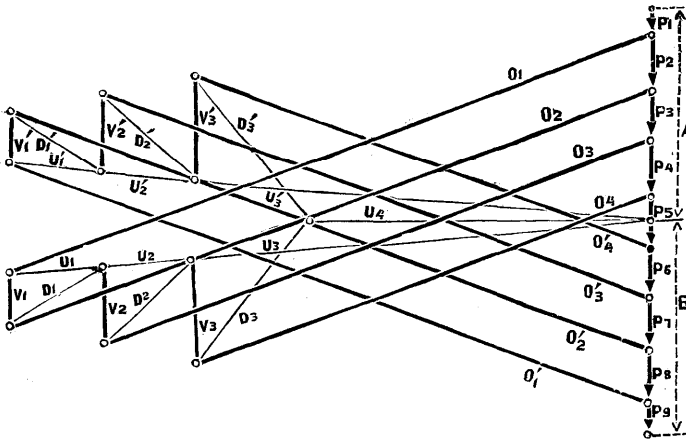
χρώματα, τότε χρωματίζομεν τὰς μὲν θλιβομένας Δοκοὺς ἐρυθρὰς τὰς δὲ τανυομένας κυανᾶς. Διὰ τὰ Δυναμοπολύ-

Σχ. 166
Ἀγγλική στέγη.



Κλίμαξ 1 : 200 1 ἐκ. = 2 μ.

Σχ. 16
Δυναμοπολύγωνον τοῦ σχημ. 166.



Κλίμαξ 1 ἐκ. = 2000 χγ

γωνία τῶν ὑπ' ὀψει δικτυωτῶν Φορεῖων, ὡς καὶ τῶν ὁμοίων, ἰσχύουσιν οἱ ἀκόλουθοι Κανόνες.

1. « Ἀπασαι αἱ γραμμαὶ αἱ ἀναφερόμεναι εἰς τὸ κάτω

ΣΤΑΤΙΚΗ ΑΓΓΕΛΟΥ ΓΚΙΝΗ

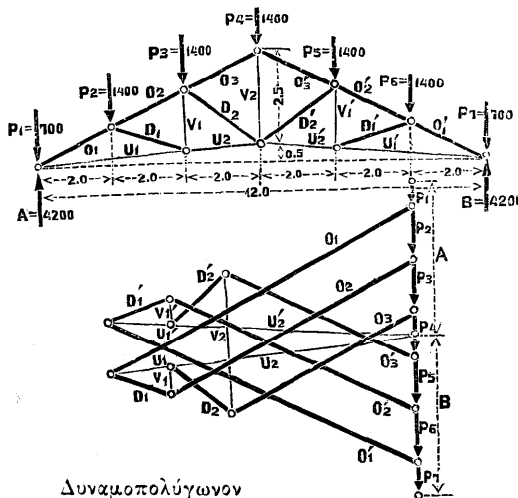
πέλμα συναντώνται εἰς τὸ σημεῖον, ὅπερ χωρίζει τὰς Ἑδροπιέσεις Α καὶ Β».

2. «Αἱ γραμμαὶ αἱ ἀναφερόμεναι εἰς τὸ ἄνω Πέλμα χωρίζουσι τὰ Φορτία τῶν σχετικῶν Κόμβων».

3. «Αἱ γραμμαὶ αἱ ἀναφερόμεναι εἰς τὰς Δοκοὺς τοῦ τοιχώματος σχηματίζουνσι τεθλασμένην γραμμὴν μεταξὺ τῶν γραμμῶν τῶν ἀναφερομένων εἰς τὰ Πέλματα».

Σχ. 168

Κλίμαξ 1:200. 1 ἐκ. = 2 μ. (Ἀγγλική στέγη).



Δυναμοπολύγωνον

Κλίμαξ 1 ἐκ. = 2000 χγ.

Σχ. 169

Διὰ τὰ Πέλματα δυνάμεθα προσέτι νὰ εἰπωμεν:

«Εἰς τὸ Δυναμοσχέδιον αἱ γραμμαὶ αἱ ἀναφερόμεναι εἰς τὰς Δοκοὺς τοῦ Φορείου εὐρίσκονται μεταξὺ τῶν ἐξωτερικῶν Δυνάμεων ἐκείνων, μεταξὺ τῶν ὁποίων εὐρίσκονται ἐν τῷ Σχεδίῳ τοῦ Φορείου αἱ σχετικαὶ Δοκοί».

Ἄς δοκιμασθῇ ἡ ἀκρίβεια τῶν ἀνωτέρω κανόνων εἰς

τὰ Σχ. 146 μέχρι 169! Κατόπιν τροποποιήσωμεν τὰ Φορτία τῶν αὐτῶν Φορεῖων καὶ χαράξωμεν τὰ σχετικὰ Δυναμοσχέδια σχηματίζοντες δι' ἑκαστον Κόμβον τὸν Δυναμοσυρμὸν συμφώνως πρὸς τοὺς Κανόνας τούτους.

Τὰ δύο Σχήματα 166 καὶ 168 Ζευκτοῦ ἀγγλικοῦ συστήματος διαφέρουσι κατὰ τὰς διευθύνσεις τῶν διαγωνίων. Ἡ διεύθυνσις αὕτη ἔχει ἐπὶ τῆς διανομῆς τῶν ἐσωτερικῶν Δυνάμεων τὴν ἐπιρροὴν ὅτι, εἰς μὲν τὸ Σχ. 166 οἱ Ὅρθοστάται θλίβονται ἐνῶ αἱ Διαγώνιοι τανύονται, εἰς δὲ τὸ Σχ. 168 συμβαίνει τὸ ἀντίθετον, αἱ Διαγώνιοι θλίβονται καὶ οἱ Ὅρθοστάται τανύονται.

Εἰς τὰ ὑπ' ὄψει δύο Ζευκτὰ (Σχ. 166 καὶ 168) αἱ διαφοροὶ Δοκοὶ δὲν διακρίνονται δι' αὐξοντος ἀριθμοῦ ἐν τῷ συνόλῳ, ἀλλ' ἀριθμοῦνται κεχωρισμένως τὸ ἄνω Πέλμα, τὸ κάτω Πέλμα, οἱ Ὅρθοστάται καὶ αἱ Διαγώνιοι ὁ τρόπος οὗτος διευκολύνει συνήθως τὴν ἐπισκόπησιν.

Εἰς τὰ ἄλλα Δικτυωτὰ τὰ τῆς ἀριθμήσεως ἔχουσιν ὡς ἑξῆς: Εἰς τὸ Σχ. 146 τὸ ἄθροισμα τῶν ἀριθμῶν συμμετρικῶν Δοκῶν ἀνά δύο εἶναι πάντοτε $= 6$, εἰς τὸ Σχ. 154 εἶναι τὸ αὐτὸ ἄθροισμα πάντοτε $= 12$, εἰς τὸ Σχ. 162 εἶναι $= 20$ καὶ εἰς τὸ Σχ. 164 εἶναι $= 10$. Διὰ τοῦ τρόπου τούτου αἱ συμμετρικαὶ Δοκοὶ ἀναγνωρίζονται ὡς τοιαῦται ἐξ αὐτῶν ἀκόμη τῶν ἀριθμῶν των.

Ἡ ἀπ' ἀλλήλων ἀπόστασις τῶν Πελμάτων εἰς τὸ μέσον καλεῖται τὸ ὕψος τοῦ Δικτυωτοῦ. Τοῦτο ἔχει μεγάλην ἐπιρροὴν ἐπὶ τῶν ἀναπτυσσομένων εἰς τὰς Δοκοὺς ἐσωτερικῶν Δυνάμεων, διότι, δι' ὀρισμένον ἀνοιγμα καὶ φορτίον, αἱ εἰς τὰς μεσαίας Δοκοὺς τῶν Πελμάτων ἀναπτυσσόμεναι Δυνάμεις εἰσὶν ἐπὶ τοσοῦτον μικρότεραι, ὅσον μεγαλεῖτερον εἶναι τὸ ὕψος καὶ ἀντιθέτως.

Δοκιμάζομεν τὸ ὀρθὸν τοῦ Κανόνος τούτου διὰ χαρά-

ξεως τῶν Δυναμοσχεδίων δικτυωτῶν Φορείων τοῦ αὐτοῦ ἀνοιγματος καὶ φορτίου ἀλλὰ διαφόρου ὕψους.

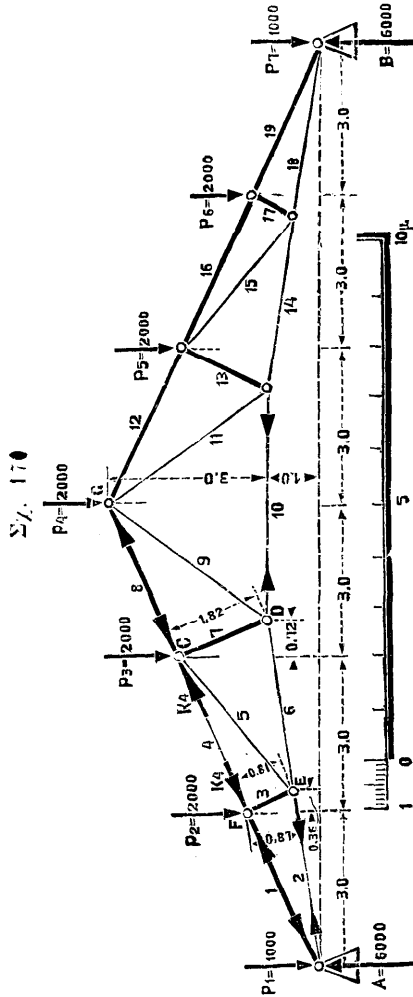
Γίνεται ἀκόμη λόγος περὶ τοῦ ὕψους τῶν δικτυωτῶν Φορείων καὶ δι' ἄλλας, ἐκτὸς τοῦ μέσου, θέσεις. Καὶ τὰ ὕψη ταῦτα ἔχουσιν ἐπὶ τῶν ἐσωτερικῶν Δυνάμεων τῶν Πελμάτων (ὄρα § 31).

§ 31. Προσδιορισμὸς τῶν ἐντάσεων τῇ βοήθειᾳ τῶν Ῥοπῶν.

Τὰς εἰς τὰς Δοκοὺς ἀναπτυσσομένας ἐσωτερικὰς Δυνάμεις δυνάμεθα νὰ προσδιορίσωμεν καὶ ἀναλυτικῶς διὰ τῆς ἐφαρμογῆς τοῦ θεωρήματος τῶν Ῥοπῶν.

Ἐὰν ἀφαιρέσωμεν τὴν Δοκὸν 6 τοῦ Δικτυωτοῦ (Σχ. 170) καὶ φαντασθῶμεν δύο Δυνάμεις ἐνεργοῦσας κατ' ἐφελκυσμὸν εἰς τὰ ἐναπομείναντα παρὰ τοὺς Κόμβους Ε καὶ D τμήματα τῆς Δοκοῦ, ἴσας πρὸς τὴν εἰς τὴν Δοκὸν πρὸ τῆς ἀποκοπῆς ἐνεργοῦσαν ἔντασιν, τὸ Δικτυωτὸν θὰ ἐξακολουθῇ νὰ εὐρίσκηται ἐν ἰσορροπίᾳ. Ἡ Δύναμις K_6 παρὰ τὸν Κόμβον Ε ἐμποδίζει τὰς Δυνάμεις A , P_1 καὶ P_2 ἀπὸ τοῦ νὰ στρέφωσι πρὸς τὰ δεξιὰ περὶ τοῦ Κόμβου C τὸ ἀριστερὸν τμήμα τοῦ Δικτυωτοῦ, καὶ ἡ ὁμοία Δύναμις K_6 ἐνεργοῦσα παρὰ τὸ D ἐμποδίζει τὰς Δυνάμεις B , P_7 , P_6 , P_3 καὶ P_4 ἀπὸ τοῦ νὰ στρέφωσιν ἀριστερὰ περὶ τοῦ Κόμβου C τὸ δεξιὸν τμήμα τοῦ Δικτυωτοῦ. Ἐὰν δὲν ὑπῆρχον αἱ Δυνάμεις K_6 εἰς τοὺς Κόμβους D καὶ Ε θὰ εἶχομεν μίαν στροφὴν ἀμφοτέρων τῶν τμημάτων περὶ τοῦ Κόμβου C σὺν τῇ ταύτοχρόνῳ κατακαθίσει τοῦ Δικτυωτοῦ. Ἵνα μὴ γείνη τοῦτο πρέπει ἡ Ῥοπή στροφῆς τῆς παρὰ τὸ Ε ἐνεργοῦσης Δυνάμεως νὰ κρατῇ τὴν ἰσορροπίαν εἰς τὴν Ῥοπήν στροφῆς τῶν Δυνάμεων A , P_1 καὶ P_2 , ἥτοι νὰ ᾔηται :

$$K_1 \cdot 1,74 = A \cdot 6,0 - P_1 \cdot 6,0 - P_2 \cdot 3,0$$



η) (ἐὰν χαρακτηρίσωμεν ὡς ἀρνητικὰς τὰς πρὸς τὰ ἀριστερὰ ἐνεργούσας ῥοπὰς).

$$A. 6,0 - P_1. 6,0 - P_2. 3,0 - K_3. 1,74 = 0.$$

θέτοντες δὲ τοὺς οἰκείους ἀριθμοὺς ἔχομεν :

$$K_3. 1,74 = 6000.6,0 - 1000.6,0 - 2000.3,0 \\ = 36000 - 6000 - 6000 = 24000 \text{ χγ. μ.}$$

$$K_3 = \frac{24000}{1,74} = 13800 \text{ χγ. εἰς στρογγύλον ἀριθμόν.}$$

Ἐξετάζοντες τὸ δεξιὸν τοῦ C τμήμα τοῦ Δικτυωτοῦ, παρατηροῦμεν ὅτι ἡ Δύναμις K_3 ἢ παρὰ τὸ D ἐνεργοῦσα σκοπὸν ἔχει νὰ ἐμποδίσῃ τὴν περὶ τὸ C στροφὴν τοῦ ὑπ' ὅψει τμήματος. Ἔχομεν λοιπὸν καὶ ἐνταῦθα :

$$K_3. 1,74 = B. 12,0 - P_7. 12,0 - P_6. 9,0 - P_5. 6,0 - P_4. 3,0 \\ \text{ἢ (ἐὰν χαρακτηρίσωμεν ὡς ἀρνητικὰς τὰς πρὸς τὰ ἀριστερὰ ἐνεργοῦσας Ῥοπὰς) θέλομεν ἔχει:}$$

$$K_3. 1,74 + P_4. 3,0 + P_5. 6,0 + P_6. 9,0 + P_7. 12,0 \\ - B. 12,0 = 0$$

καὶ εἰς ἀριθμοὺς :

$$K_3. 1,74 = 6000.12,0 - 1000.12,0 - 2000.9,0 \\ - 2000.6,0 - 2000.3,0 \\ = 60000 - 12000 - 18000 - 6000 = 24000 \text{ χγ. μ.}$$

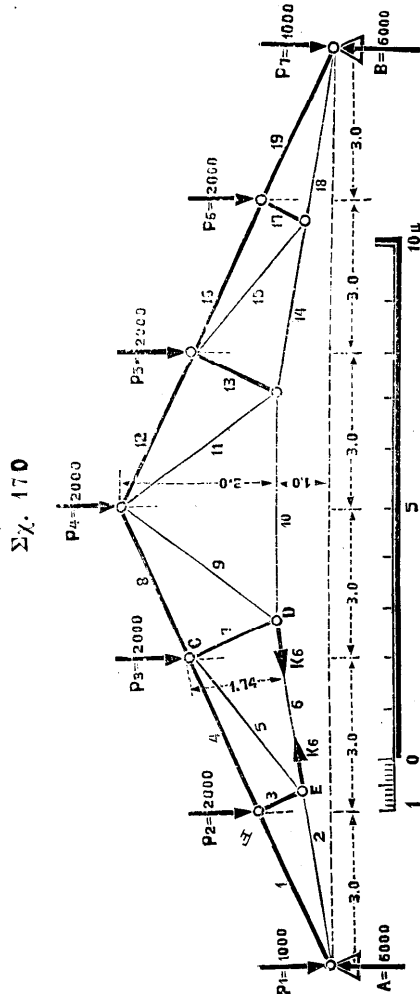
$$K_3 = \frac{24000}{1,74} = 13800 \text{ χγ.}$$

ἴτοι ὡς καὶ προηγουμένως.

Τῷ ὄντι οἱ ὑπολογισμοὶ δεόν νὰ δώσωσι διὰ τὰς K_3 Δυνάμεις τῶν σημείων D καὶ E τὸ αὐτὸ ἀποτέλεσμα, διότι ἀμφότεραι ἀντιπροσωπεύουσι τὴν ἔντασιν τῆς Δοκοῦ 6. Ὁ διπλοῦς ὑπολογισμὸς παρέχει τὸ μέσον τοῦ ἐλέγχου.

Διὰ νὰ ὑπολογίσωμεν τὴν Δύναμιν τῆς Δοκοῦ 4, φανταζόμεθα ἀφαιρεθεῖσαν ἐκ τοῦ ὅλου Δικτυωτοῦ τὴν Δοκὸν 4 καὶ ἀντικατασταθεῖσαν εἰς τοὺς Κόμβους F καὶ C διὰ δύο Δυνάμειν K_4 ἴσων πρὸς τὴν τὸ πρότερον ἐν τῇ ἰδίᾳ Δοκῇ γεννηωμένην ἐσωτερικὴν Δύναμιν (Σχ. 171).

Ἡ K_1 πρέπει νά ἐμποδίζῃ τήν περί τὸ E στροφὴν τοῦ



ἀριστεροῦ τμήματος, ἥτοι πρέπει νά ὑφίσταται ἡ ἐξίσωσις:

$$K_{1.0,91} = A_{.3,36} - P_{1.3,36} - P_{2.0,36}$$

ἢ (λαμβάνομένων ὡς ἀρνητικῶν τῶν πρὸς τ' ἀριστερὰ ἐνεργουσῶν Ροπῶν)

$$A.3,36 - P_1.3,36 - P_2.0,36 - K_1.0,91 = 0$$

καὶ εἰς ἀριθμούς :

$$K_1.0,91 = 6000.3,36 - 1000.3,36 - 2000.0,36 \\ = 16800 - 720 = 16080 \text{ χγ. μ.}$$

$$K_1 = \frac{16080}{0,91} = 17700 \text{ χγ. (στρογ. ἀριθ.)}$$

Διὰ τὸ δεξιόθεν τοῦ σημείου Ε τμήμα τοῦ Δικτυωτοῦ, πρέπει ἢ παρὰ τὸ C Δύναμις K_1 νὰ ἐμποδίσῃ τὴν περὶ τὸ Ε πρὸς τὰ ἀριστερὰ στροφὴν τοῦ τμήματος, κατὰ συνέπειαν πρέπει νὰ ἔχωμεν :

$$K_1.0,91 = B.14,64 - P_7.14,64 - P_6.11,64 \\ - P_3.8,64 - P_4.5,64 - P_3.2,64.$$

ἢ (λαμβάνομένων ὡς ἀρνητικῶν τῶν πρὸς τὰ ἀριστερὰ ἐνεργουσῶν Ροπῶν)

$$K_1.0,91 + P_3.2,64 + P_4.5,64 + P_3.8,64 \\ + P_6.11,64 + P_7.14,64 - B.14,64 = 0$$

καὶ εἰς ἀριθμούς :

$$K_1.0,91 = 6000.14,64 - 1000.14,64 - 2000.11,64 \\ - 2000.8,64 - 2000.5,64 - 2000.2,64 \\ = 732000 - 23280 - 17280 - 11280 - 5280 \\ = 16080 \text{ χγ. μ.}$$

$$K_1 = \frac{16080}{0,91} = 17700 \text{ χγ. ὡς καὶ πρότερον.}$$

Ἡ Δύναμις τῆς Δοκοῦ 10 ὑπολογίζεται ὡς ἔπεται :

Ἡ εἰς τὸ σημεῖον D ἐνεργοῦσα Δύναμις πρέπει νὰ ἐμποδίσῃ τὴν περὶ τὸ Γ πρὸς τὰ δεξιά στροφὴν τοῦ ἀριστεροῦ τμήματος τοῦ Δικτυωτοῦ· κατὰ συνέπειαν πρέπει νὰ εἶναι :

$K_{10} \cdot 3,0 = A \cdot 9,0 - P_1 \cdot 9,0 - P_2 \cdot 6,0 - P_3 \cdot 3,0$
καὶ εἰς ἀριθμούς :

$$K_{10} \cdot 3,0 = 6000 \cdot 9,0 - 1000 \cdot 9,0 - 2000 \cdot 6,0 - 2000 \cdot 3,0 \\ = 45000 - 12000 - 6000 = 27000 \text{ ΧΥ. } \mu.$$

$$K_{10} = \frac{27000}{3} = 9000 \text{ ΧΥ.}$$

Ἡ Δύναμις τῆς Δοκοῦ 8 ὑπολογίζεται οὕτω :

Ἡ ἐκ τοῦ σημείου C ἐνεργοῦσα Δύναμις K_8 ἐμποδίζει τὴν στροφὴν περὶ τὸ D τοῦ ἀριστεροῦ τμήματος· κατὰ συν-
έπειαν ἔχομεν :

$K_8 \cdot 1,82 = A \cdot 6,72 - P_1 \cdot 6,72 - P_2 \cdot 3,72 - P_3 \cdot 0,72$
καὶ εἰς ἀριθμούς :

$$K_8 \cdot 1,82 = 6000 \cdot 6,72 - 1000 \cdot 6,72 - 2000 \cdot 3,72 \\ - 2000 \cdot 0,72 \\ = 33600 - 7440 - 1440 = 24720 \text{ ΧΥ. } \mu.$$

$$K_8 = \frac{24720}{1,82} = 13600 \text{ ΧΥ. (στρογ.)}.$$

Ἡ Δύναμις τῆς Δοκοῦ 2 ὑπολογίζεται οὕτω :

Ἡ ἐνεργοῦσα ἀπὸ τῆς ἀριστερᾶς ἑδρας Δύναμις πρέ-
πει νὰ ἐμποδίσῃ τὴν στροφὴν τῆς Δοκοῦ 1 περὶ τὸ ση-
μεῖον F, ἥτοι

$$K_2 \cdot 0,87 = A \cdot 3,0 - P_1 \cdot 3,0$$

καὶ εἰς ἀριθμούς :

$$K_2 \cdot 0,87 = 6000 \cdot 3,0 - 1000 \cdot 3,0 = 15000 \text{ ΧΥ. } \mu.$$

$$K_2 = \frac{15000}{0,87} = 17240 \text{ ΧΥ. (στρογ.)}.$$

Ἡ Δύναμις τῆς Δοκοῦ 1 ὑπολογίζεται οὕτω :

Ἡ ἀπὸ τῆς ἀριστερᾶς ἑδρας ἐνεργοῦσα Δύναμις πρέ-
πει νὰ ἐμποδίσῃ τὴν στροφὴν τῆς Δοκοῦ 2 περὶ τὸ ση-
μεῖον E, ἥτοι πρέπει νὰ εἶναι :

$$K_1 \cdot 0,91 = A \cdot 3,36 - P_1 \cdot 3,36$$

καὶ εἰς ἀριθμούς:

$$K_1.0,91 = 6000.3,36 - 1000.3,36 \\ = 16800 \text{ χγ. μ.}$$

$$K_1 = \frac{16800}{0,91} = 18460 \text{ χγ. (στρογ.)}$$

Ἐπειδὴ τὸ ἄνω Πέλμα ὑποφέρει θλίψιν καὶ τὸ κάτω ἐφελκυσμόν, γνωρίζομεν ἐκ τῶν προτέρων τὰς φορὰς ἐνεργείας τῶν ἀπὸ τῶν Κόμβων ἐνεργουσῶν ἐσωτερικῶν Δυνάμεων τῶν Δοκῶν τῶν Πελμάτων. Ἀλλὰ καὶ ἡ ἀποδοχὴ ἐσφαλμένης τινὸς φορᾶς δὲν βλάπτει, διότι ἡ σειρά τῶν ὑπολογισμῶν καταλήγει εἰς τὰς ἀληθεῖς διευθύνσεις τῶν Δυνάμεων τούτων.

Ἐπὶ παραδείγματι, ἐάν λάβωμεν, προκειμένου περὶ τοῦ προσδιορισμοῦ τῆς ἐντάσεως τῆς Δοκοῦ 6, τὴν φορὰν τῆς K_3 παρὰ τοὺς Κόμβους D καὶ E ἀντίθετον τῆς ἐν τῷ Σχ. 170 ἐνδεικνυομένης, τὴν λάβωμεν δηλαδὴ ὡς δεικνύει τὸ Σχ. 172, τότε, ἐπειδὴ ἡ Ῥοπὴ στροφῆς τῆς παρὰ τὸ E ἐνεργούσης Δυνάμεως σὺν τῇ τῆς αὐτῆς φορᾶς ἐνεργείᾳ Ῥοπῇ τῆς A πρέπει νὰ εὐρίσκωνται ἐν ἰσορροπίᾳ πρὸς τὰς ἀντιθέτου ἐνεργείας Ῥοπὰς τῶν P_1 καὶ P_2 περὶ τὸ αὐτὸ κέντρον στροφῆς C, θὰ ἔχωμεν :

$$K_6.1,74 + A.6,0 = P_1.6,0 + P_2.3,0.$$

$$\text{ἢ} \quad K_6.1,74 = P_1.6,0 + P_2.3,0 - A.6,0.$$

καὶ εἰς ἀριθμούς :

$$K_6.1,74 = 1000. 6,0 + 2000. 3,0 - 6000. 6,0. \\ = 6000 + 6000 - 36000 = - 24000 \text{ χγ.μ.}$$

$$K_6 = - \frac{24000}{1,74} = - 13800 \text{ χγ.}$$

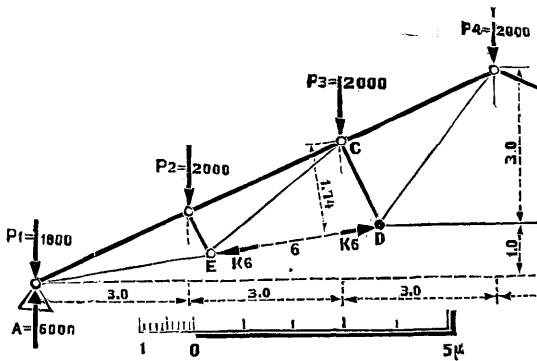
Καταλήγομεν λοιπὸν εἰς τὴν Δύναμιν K_6 τόσον μεγάλην ὥπως καὶ προηγουμένως, ἀλλὰ φορᾶς ἐνεργείας ἀντιθέτου ἐκείνης, ἢν προϋπεθέσαμεν ἐν τῷ Σχ. 172.

Άρα τὸ ἀποτέλεσμα εἶναι τὸ αὐτὸ ὅπως καὶ εἰς τὸ Σχ. 170.

Θέματα. Ὑπολογίσωμεν τὰς Δοκοὺς τῶν Πελμάτων τῶν Δικτυωτῶν τῶν Σχ. 166 καὶ 168 διὰ τῆς μεθόδου τῶν Ῥοπῶν.

Κατὰ τὸν ὑπολογισμόν τῶν Δοκῶν τῶν Πελμάτων διαυροῦμεν τὰς Ῥοπὰς τῶν ἐξωτερικῶν Δυνάμεων τοῦ

Σχ. 172



Δικτυωτοῦ διὰ τῶν μοχλοβραχιόνων τῶν ἐσωτερικῶν Δυνάμεων τῶν Δοκῶν, οἱ ὁποῖοι εἰσιν ἴσοι πρὸς τὴν ἀπ' ἀλλήλων ἀπόστασιν τῶν Πελμάτων· κατὰ συνέπειαν καταλήγομεν εἰς μικροτέρας ἐντάσεις τῶν Πελμάτων, ὅταν μεγεθύνωμεν τὴν ἀπόστασιν τούτων.

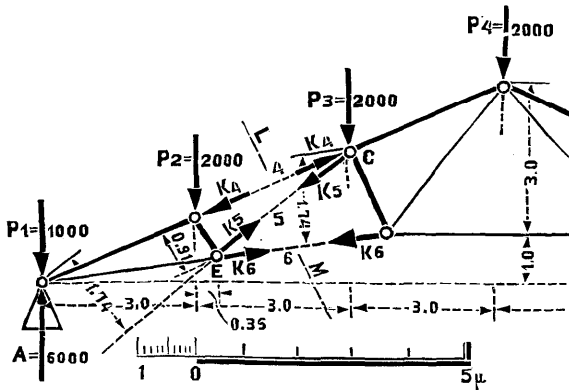
§ 32. Ὑπολογισμὸς τῶν ἐντάσεων τῶν Χιαστῶν,

Διὰ τὸν ὑπολογισμόν τῶν ἐσωτερικῶν Δυνάμεων τῶν Χιαστῶν εἶναι ἀναγκαῖα ἀκόμη μία ἐξέτασις τοῦ προβλήματος, διάφορος τῆς προηγουμένης, ἡ ἀκόλουθος:

Φαντασθῶμεν μίαν διατομὴν L—M (Σχ. 173) διὰ μέσου τοῦ Δικτυωτοῦ καὶ ἀντὶ τῶν διακοπτομένων τριῶν Δοκῶν 4, 5 καὶ 6 τὰς εἰς τὰς Δοκοὺς ταύτας ἀναπτυσσο-

μένας ελατηρίους (έσωτερικάς) Δυνάμεις, ενεργούσας εἰς τοὺς Κόμβους· ἔχομεν τότε ενεργούσας εἰς τὸ ἀποκοπὲν ἀριστερὸν τμήμα τὰς ἐξωτερικάς Δυνάμεις Λ , P_1 καὶ P_2 καὶ τὰς ἐντάσεις K_4 , K_5 καὶ K_6 . Ἄρασαι αἱ Δυνάμεις αὗται πρέπει νὰ εὐρίσκωνται ἐν ἰσορροπία, ἐὰν θέλωμεν νὰ ὑφίσταται τὸ Δικτυωτόν. Κατὰ συνέπειαν συμφάνως πρὸς τὸν ἐν τῇ § 26 διατυπωθέντα Κανόνα πρέπει τὸ

Σχ. 173



ἄθροισμα τῶν Ῥοπῶν στροφῆς τῶν Δυνάμεων τούτων μὲ κέντρον ἐν οἷονδήποτε σημείον νὰ εἶναι $= 0$.

Μεταξὺ τῶν ὑπ' ὄψει ἑξ Δυνάμεων αἱ τρεῖς εἰσιν ἄγνωστοι. Ἐὰν ὅμως λάβωμεν ὡς κέντρον στροφῆς τῶν Ῥοπῶν τὸ σημεῖον συναντήσεως τῶν γραμμῶν ἐνεργείας δύο ἐκ τῶν ἀγνώστων Δυνάμεων, αἱ Ῥοπαὶ τῶν Δυνάμεων τούτων θὰ ὦσιν $= 0$, ἐπομένως θὰ ἀπομείνῃ μία μόνον ἄγνωστος, ἡ ὁποία εὐκόλως τότε ὑπολογίζεται.

Ἐπὶ παραδείγματι, ἔστω C τὸ κέντρον στροφῆς. Ἡ ἐξίσωσις τῶν Ῥοπῶν ἔσεται :

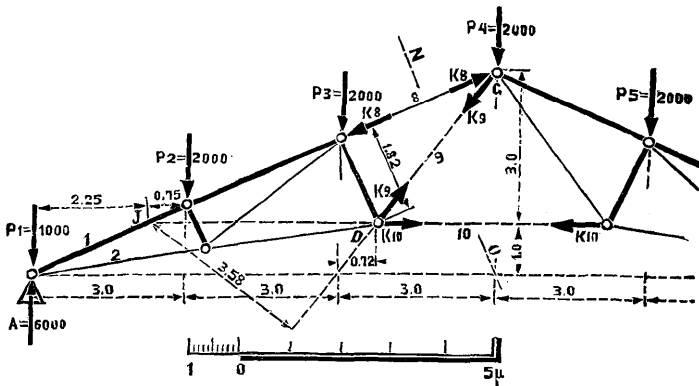
$$\begin{aligned} \Lambda.6,0 - P_1.6,0 - P_2.3,0 - K_4.0 - K_5.0 - K_6.1,74 &= 0 \\ K_6.1,74 &= \Lambda.6,0 - P_1.6,0 - P_2.3,0. \end{aligned}$$

Είναι ἡ αὐτὴ ἐξίσωσις, ἣν εὑρομεν προηγουμένως εἰς σελίδα 106 διὰ τὴν ἔντασιν τῆς Δοκοῦ 6 ἴσιν μὲ 13800 χγ. Καταλήγομεν λοιπὸν εἰς τὸ αὐτὸ ἀποτέλεσμα.

Ἐκλέγοντες τὸ Εἰς κέντρον στροφῆς ἔχομεν ὡς ἐξίσωσιν τῶν Ὑποῶν :

$$\begin{aligned} \Lambda.3,36 - P_1.3,36 - P_2.0,36 - K_1.0,91 + K_3.0 + K_5.c &= 0. \\ K_1.0,91 &= \Lambda.3,36 - P_1.3,36 - P_2.0,36 \end{aligned}$$

Σχ. 174



Εἶναι ἡ αὐτὴ ἐξίσωσις πρὸς τὴν εἰς σελίδα 104 εὑρεθεῖσαν, ἥτις ἔδωκεν ἡμῖν τὴν $K_1 = 17700$ χγ.

Λαμβάνοντες ὡς κέντρον στροφῆς τὸ σημεῖον συναντήσεως τῶν K_1 καὶ K_3 (τὸ ἀριστερὸν Στήριγμα), θέλομεν ἔχει :

$$\begin{aligned} \Lambda.0 + P_1.0 + P_2.3,0 + K_1.0 - K_3.1,74 + K_5.0 &= 0. \\ K_3.1,74 &= P_2.3,0 \end{aligned}$$

καὶ εἰς ἀριθμούς :

$$K_3.1,74 = 2000.3,0$$

$$K_3 = \frac{6000}{1,74} = 3450 \text{ χγ. (στρογ.)}.$$

Φαντασθῶμεν μίαν τομὴν N — O (Σχ. 174) καὶ ἀντὶ

τῶν τριῶν ἀποκοπτομένων Δοκῶν 8,9 καὶ 10 τὰς ἀνα-
πτυσσομένας ἐν αὐταῖς Δυνάμεις K_8 , K_9 καὶ K_{10} . Ἐνερ-
γοῦσι τότε ἐπὶ τοῦ ἀριστεροῦ ἀποκεκομένου τμήματος αἱ
γνωσταὶ ἐξωτερικαὶ Δυνάμεις A , P_1 , P_2 καὶ P_3 καὶ αἱ
ἐντάσεις K_8 , K_9 καὶ K_{10} , τῶν ὁποίων ζητοῦνται τὰ με-
γέθη.

Ἐκλέγοντες ὡς κέντρον στροφῆς τὸ σημεῖον συναντή-
σεως τῶν Δοκῶν 8 καὶ 9 (Γ), θέλομεν ἔχει ὡς ἐξίσωσιν
τῶν Ῥοπῶν :

$$A.9,0 - P_1.9,0 - P_2.6,0 - P_3.3,0 + K_8.0 + K_9.0 \\ - K_{10}.3,0 = 0.$$

$$K_{10}.3,0 = A.9,0 - P_1.9,0 - P_2.6,0 - P_3.3,0.$$

Ἡ αὐτὴ ἐξίσωσις ἦν εὗρομεν ἐν τῇ σελίδι 104 καὶ ἤτις
δίδει ἡμῖν τὸ ζητούμενον μέγεθος $K_{10} = 9000$ χγ.

Ἐκλεγομένου ὡς κέντρου στροφῆς τοῦ σημείου συναν-
τήσεως τῶν Δοκῶν 9 καὶ 10 (Δ) ἔχομεν τὴν ἐξίσωσιν
τῶν Ῥοπῶν :

$$A.6,72 - P_1.6,72 - P_2.3,72 - P_3.0,72 - K_8.1,82 \\ - K_9.0 - K_{10}.0 = 0.$$

$$K_8.1,82 = A.6,72 - P_1.6,72 - P_2.3,72 - P_3.0,72$$

Ἡ αὐτὴ ἐξίσωσις ἦν εὗρομεν ἐν σελ. 105 καὶ ἤτις δί-
δει ἡμῖν τὸ ζητούμενον μέγεθος $K_8 = 13600$ χγ. (στρογ.).

Ἐκλεγομένου ὡς κέντρου στροφῆς τοῦ σημείου συ-
ναντήσεως τῶν δοκῶν 8 καὶ 10 (J) ἔχομεν τὴν ἐξίσωσιν

$$A.2,25 - P_1.2,25 + P_2.0,75 + P_3.3,75 + K_8.0 \\ - K_9.3,58 + K_{10}.0 = 0.$$

$$K_9.3,58 = A.2,25 - P_1.2,25 + P_2.0,75 + P_3.3,75$$

καὶ εἰς ἀριθμούς :

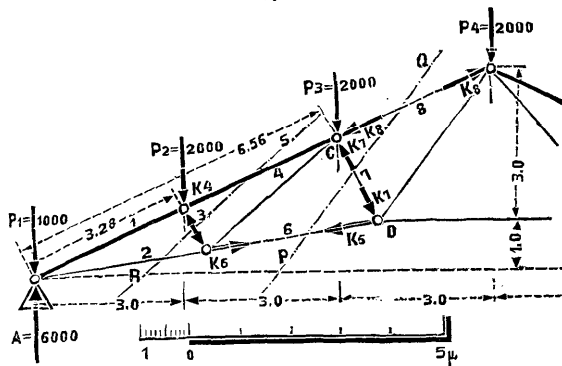
$$K_9.3,58 = 5000. 2,25 + 2000. 0,75 + 2000. 3,75 \\ = 11250 + 1500 + 7500 = 20250 \text{ χγ. } \mu.$$

$$K_9 = \frac{20250}{3,58} = 5660 \text{ χγ. (στρογ.)}.$$

Διὰ νὰ προσδιορίσωμεν τὴν ἔντασιν τῆς Δοκοῦ 7 πρέπει νὰ φαντασθώμεν τομήν, ἡ ὁποία συναντᾷ τὰς Δοκοὺς 6, 7 καὶ 8 (P—Q Σχ. 175).

Ἡ ἐκλογή ὡς κέντρου στροφῆς τῶν Κόμβων C καὶ D δίδει τὰς αὐτὰς ἐξισώσεις τὰς ὁποίας ἐχρησιμοποιήσαμεν

Σχ. 175



ἤδη (σελίδες 100, 102, 104) διὰ τὸν ὑπολογισμόν τῶν K_6 καὶ K_8 .

Διὰ τὸν ὑπολογισμόν τῆς K_7 ἔχομεν νὰ ἐκλέξωμεν ὡς κέντρον στροφῆς τὸ σημεῖον συναντήσεως τῶν Δοκῶν 6 καὶ 8 (Στήριγμα A). Ἐπὶ τοῦ ἀριστεροῦ τμήματος ἐνεργοῦσιν αἱ Δυνάμεις A , P_1 , P_2 , P_3 , K_6 , K_7 καὶ K_8 .

Οἱ μοχλοβραχίονες τῶν Δυνάμεων A , P_1 , K_6 καὶ K_8 εἶναι = 0, συνεπῶς ἐκ τῆς συνθήκης ἰσορροπίας ἀπομένει τὸ ἀκόλουθον :

$$P_2 \cdot 3,0 + P_3 \cdot 6,0 - K_7 \cdot 6,56 = 0$$

καὶ εἰς ἀριθμούς :

$$K_7 \cdot 6,56 = 2000 \cdot 3,0 + 2000 \cdot 6,0 = 18000 \text{ χγ. μ.}$$

$$K_7 = \frac{18000}{6,56} = 2740 \text{ ΧΥ. (στρογ).}$$

Διὰ νὰ προσδιορίσωμεν τὴν K_3 δέον νὰ φαντασθῶμεν μίαν τομὴν, ἡ ὁποία συναντᾷ τὰς Δοκοὺς 2, 3 καὶ 4 ($R-S$ Σχ. 175) καὶ νὰ ἐκλέξωμεν ὥς κέντρον στροφῆς τὸ σημεῖον συναντήσεως τῶν Δοκῶν 2 καὶ 3 (ἀριστερὸν στήριγμα).

Ἐπὶ τοῦ ἀριστεροῦ τμήματος ἐνεργοῦσιν αἱ ἐξωτερικαὶ Δυνάμεις Λ , P_1 καὶ P_2 καὶ αἱ ἐντάσεις K_2 , K_3 καὶ K_4 . Οἱ μοχλοβραχίονες τῶν Δυνάμεων Λ , P_1 , K_2 καὶ K_4 εἰσὶν $= 0$, συνεπῶς ἡ συνθήκη ἰσορροπίας περιορίζεται ὥς ἔπεται :

$$P_{2,3,0} - K_{3,3,28} = 0$$

$$\text{ἐξ ἧς ἔχομεν : } K_3 = \frac{2000}{3,28} 3,0 = 1830 \text{ ΧΥ. (στρογ).}$$

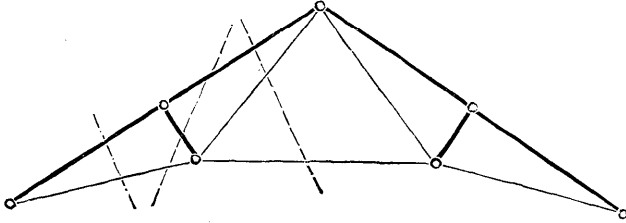
Προκειμένου περὶ τῶν ἐντάσεων τῶν Χιαστῶν δὲν γνωρίζομεν ἐκ τῶν προτέρων ἐὰν αὐταὶ εἰσὶ θετικαὶ (ἐφελκυσμοὶ) ἢ ἀρνητικαὶ (θλίψεις). Δὲν βλάπτει ὅμως ἐὰν λάβωμεν ἐσφαλμένην τὴν διεύθυνσιν τῆς ἀπὸ τοῦ ἐνὸς Κόμβου ἐνεργούσης Δυνάμεως, διότι ὁ ὑπολογισμὸς θὰ καταλήξῃ ἐν τῇ περιπτώσει ταύτῃ εἰς Δύναμιν φορᾶς ἐνεργείας ἀντιθέτου τῆς ἐσφαλμένης, ἄρα ἐκ τοῦ ὑπολογισμοῦ θὰ προκύψῃ ἡ ὀρθὴ φορὰ ἐνεργείας τῆς ὑπ' ὄψει Δυνάμεως ὅπως συνέβη εἰς τὰς σελίδας 105 — 106. Ἄς δοκιμάσωμεν εἰς μερικά παραδείγματα τῶν σελίδων 107—112.

Ἡ τῇ βοηθείᾳ τῶν Ῥοπῶν ἐξεύρεσις τῶν ἐντάσεων εἶναι ἐνίοτε διεξοδικωτέρα τοῦ προσδιορισμοῦ αὐτῶν διὰ τοῦ Δυναμοπολυγώνου, εἰς τὴν περίπτωσιν θέλομεν νὰ προσδιορίσωμεν τὰς ἐντάσεις πασῶν τῶν ἀποτελοῦσάν τὸ Δικτυωτὸν Δοκῶν.

Πολλάκις ὅμως κατὰ τὴν μελέτην Ἔργου τινὸς περιορίζεται τὸ θέμα εἰς μόνον τὸν προσδιορισμὸν μιᾶς ἢ μερικῶν Δοκῶν τῶν Πελμάτων· τότε ἡ λύσις εἶναι εὐκολωτέρα τῇ βοηθείᾳ τῶν Ῥοπῶν παρὰ διὰ τῆς γραφικῆς μεθόδου τοῦ Δυναμοπολυγώνου. Ἐπίσης ἡ προσωπικὴ προτίμησις βαρύνει πολὺ ἐπὶ τοῦ προκειμένου. Ἄλλος προτιμᾷ τὸν γραφικὸν ὑπολογισμὸν καὶ ἄλλος τὸν ἀριθμητικόν.

Ὁ διὰ τοῦ θεωρήματος τῶν Ῥοπῶν προσδιορισμὸς τῶν

Σχ. 176



ἐντάσεων εἶναι τότε μόνον δυνατὸς ὅταν ἡ διασχίζουσα τὸ Δικτυωτὸν τομὴ συναντᾷ ἀριθμὸν Δοκῶν οὐχὶ μεγαλύτερον τῶν τριῶν, διότι τότε μόνον, λαμβανομένου ὡς κέντρου στροφῆς τοῦ σημείου συναντήσεως τῶν δύο ἐκ τῶν τριῶν Δοκῶν, τὸ θεώρημα τῶν Ῥοπῶν δίδει ἡμῖν μίαν ἐξίσωσιν μὲ μίαν μόνον ἄγνωστον, τὴν ἐντασιν τῆς τρίτης Δοκοῦ ἣν καὶ προσδιορίζομεν.

Ὅτι διὰ τοῦ θεωρήματος τῶν Ῥοπῶν εἶναι δυνατόν νὰ προσδιορίσωμεν τὰς ἐντάσεις πασῶν τῶν Δοκῶν τοῦ Δικτυωτοῦ τοῦ Σχ. 162 ἀπεδείχθη ἤδη ἐν τοῖς προηγουμένοις, ὅπου καὶ διεξήχθησαν οἱ σχετικοὶ ὑπολογισμοί. Εἰς τὸ Σχ. 176 ἐμφαίνεται πῶς πρέπει νὰ χαραχθῶσιν αἱ τομαὶ εἰς ἓν Φορεῖον Πολονσῶ ὅπερ παριστᾷ τὸ ἐν λόγῳ Σχῆμα.

Ἐπίσης εὐκόλον εἶναι νὰ χαράξωμεν τὰς τομὰς εἰς τὸ Σχ. 166. Εἰς τὰ Σχ. 164 καὶ 168 δὲν δυνάμεθα ἀπ' εὐθείας διὰ τῆς μεθόδου τῆς τομῆς νὰ προσδιορίσωμεν τὴν ἔντασιν τῆς μεσαίας Δοκοῦ τοῦ Γεμίσματος· δυνάμεθα ὅμως νὰ εὗρωμεν τὴν ἔντασιν ταύτην κατὰ τὴν εἰς τὰς § 28 καὶ § 29 ὑποδεικνυομένην μέθοδον, ὅταν εἰσὶ δεδομένοι αἱ ἐντάσεις τῶν λοιπῶν Δοκῶν.

Πόσον ἰσχυρὰς δέον νὰ παραδεχθῶμεν τὰς Δοκοὺς ἐκάστου Δικτυωτοῦ ἵνα δύνανται αὐταὶ ἀσφαλῶς ν' ἀνθίστανται κατὰ τῶν προκαλουμένων ἐν αὐταῖς ἐντάσεων, διδάσκει τὸ δεῦτερον καὶ τρίτον Μέρος τοῦ Βιβλίου τούτου.

ΠΕΡΙΕΧΟΜΕΝΑ

ΚΕΦΑΛΑΙΟΝ Α΄

Σύνθεσις δύο Δυνάμεων καὶ Ἀποσύνθεσις μιᾶς Δυνάμεως εἰς δύο.

Πρόλογος.....	Σελίς	2
§ 1. Γραφικὴ παράστασις τῶν Δυνάμεων.....	»	5
§ 2. Δυνάμεις ἐπὶ τῆς αὐτῆς γραμμῆς.....	»	6
§ 3. Τὸ παραλληλόγραμμον τῶν Δυνάμεων.....	»	9
§ 4. Παράδειγμα.....	»	14
§ 5. Ἀποσύνθεσις μιᾶς Δυνάμεως εἰς δύο Συνιστώσας...	»	18
§ 6. Ἱσοροπία τριῶν Δυνάμεων εἰς ἓν σημεῖον	»	28

ΚΕΦΑΛΑΙΟΝ Β΄

Σύνθεσις Δυνάμεων πλειοτέρων τῶν δύο.

§ 7. Τὸ Δυναμοτρίγωνον.....	Σελίς	29
§ 8. Τὸ Δυναμοπολύγωνον	»	30
§ 9. Δυνάμεις κατὰ διαφόρους διευθύνσεις.....	»	33
§ 10. Παραδείγματα	»	35
§ 11. Παράλληλοι Δυνάμεις.....	»	38

ΚΕΦΑΛΑΙΟΝ Γ΄

Κέντρα βαρύτητος.

§ 12. Γραμμὰ καὶ κέντρα βαρύτητος.....	Σελίς	44
§ 13. Καταστάσεις ἰσοροπίας	»	47
§ 14. Ἀπλᾶ Σχήματα.....	»	49
§ 15. Τραπεζίον	»	51
§ 16. Σχήματα Ἀκανόνιστα.	»	53
§ 17. Σχοινοτεφεῖς Πολύγωνον Δυνάμεων μετὰ παραλλήλων	»	57

ΚΕΦΑΛΑΙΟΝ Δ'

Ῥοπαὶ καὶ Ἑδροπιέσεις.

§ 18. Ῥοπαὶ κάμψεως καὶ Ῥοπαὶ στροφῆς	Σελίς	61
§ 19. ^ε Ῥοπή πλειοτέρων Δυνάμεων	»	64
§ 20. Παρχδεύγματα	»	66
§ 21. Προσδιορισμὸς τῶν Κέντρων βαρύτητος διὰ τῶν Ῥοπῶν	»	68
§ 22. Προσδιορισμὸς τῶν Ἑδροπιέσεων διὰ τῶν Ῥοπῶν .	»	72
§ 23. Προσδιορισμὸς τῶν Ἑδροπιέσεων γραφικῶς. . . .	»	75
§ 24. Ἑδροπιέσεις Δοκοῦ φορτωμένης διὰ περισσοτέρων φορτίων (γραφικὴ μέθοδος).	»	78
§ 25. Ἑδροπιέσεις Δοκοῦ φορτωμένης μὲ περισσότερα φορτία (ὑπολογισμός).	»	79
§ 26. Δυνάμεις κατὰ διαφόρους διευθύνσεις	»	82

ΚΕΦΑΛΑΙΟΝ Ε'

Δικτυωτά.

§ 27. Γενικότητες	Σελίς	88
§ 28. Προσδιορισμὸς τῶν Ἐντάσεων.	»	89
§ 29. Φορεῖα Πολυονσῶ	»	92
§ 30. Ἄλλοι τύποι δικτυωτῶν φορεῶν	»	95
§ 31. Προσδιορισμὸς τῶν ἐντάσεων τῇ βοήθειᾳ τῶν Ροπῶν	»	100
§ 32. Ὑπολογισμὸς τῶν ἐντάσεων τῶν Χιαστῶν	»	107

